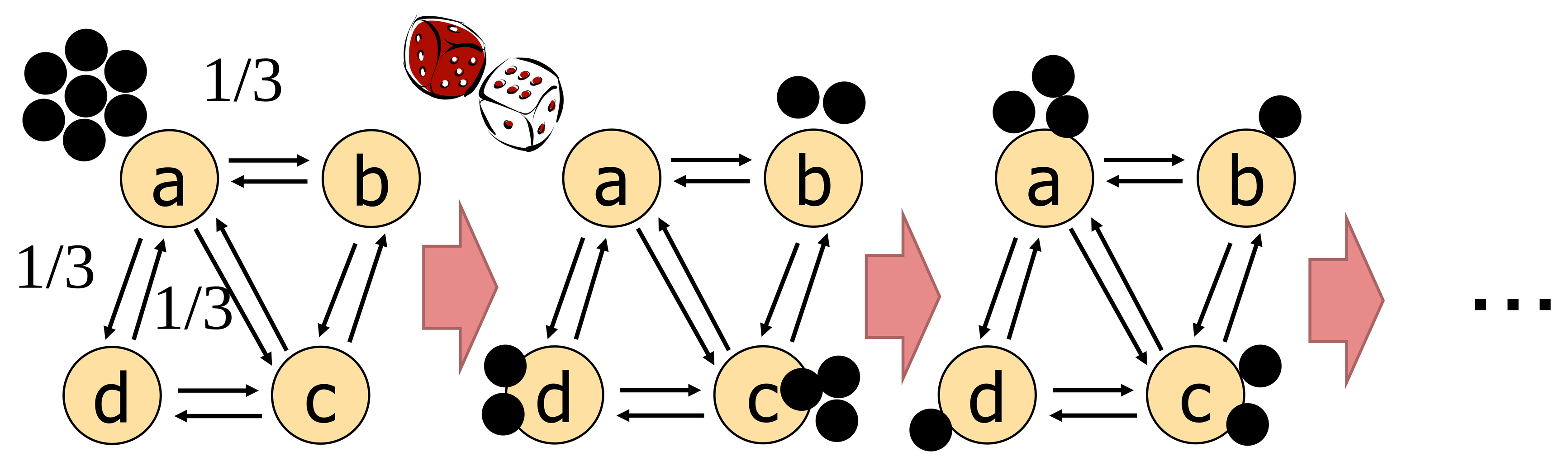
ランダムウォークの脱乱択化

白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史 （九州大学）

ランダムウォーク（マルコフ連鎖）

- トークン(サンプル)を**ランダムに**ばらまく

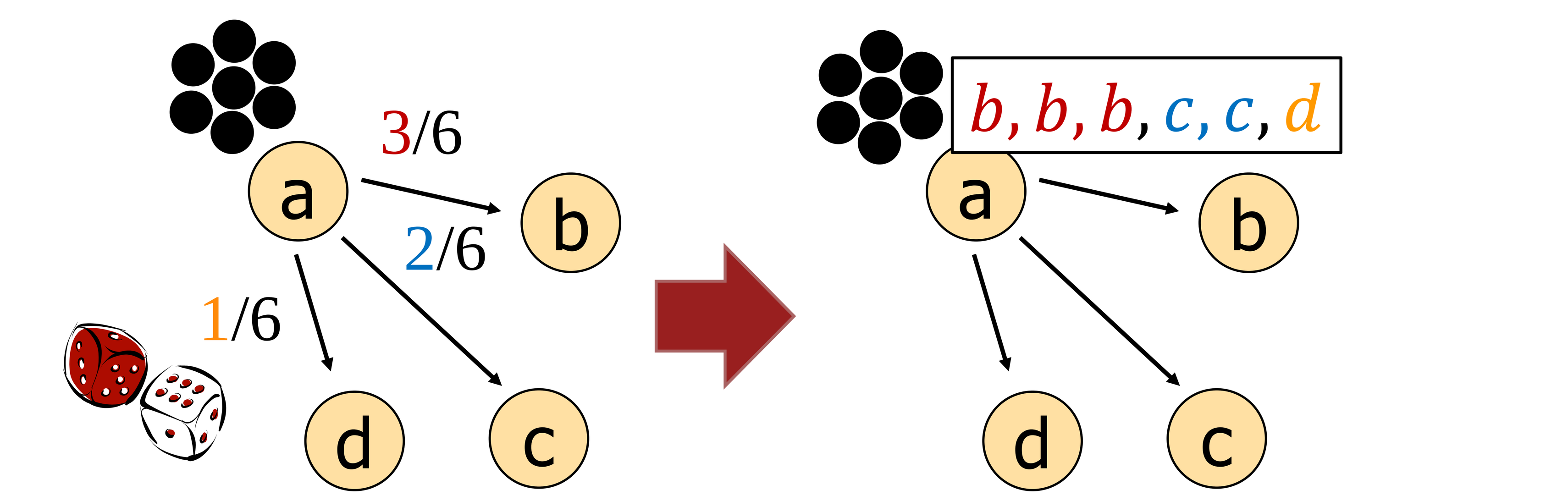


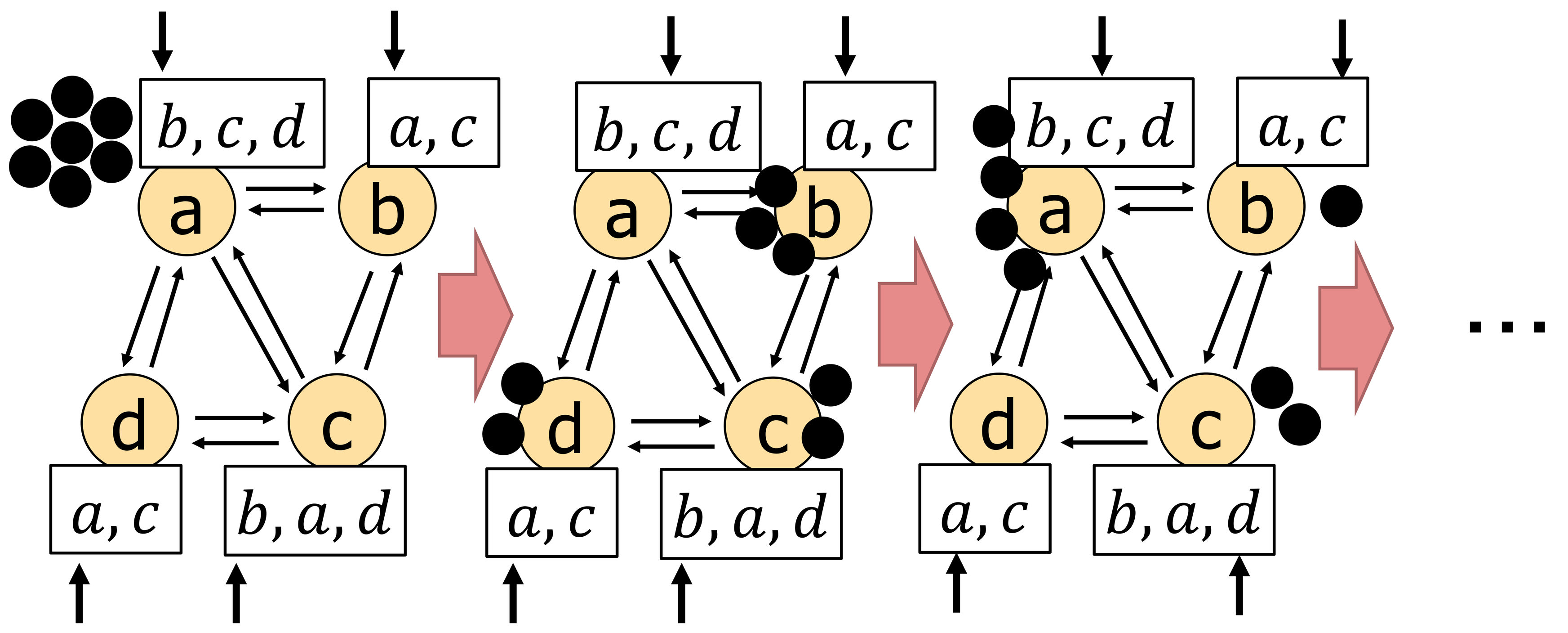
- 応用：ランダムサンプリング, 近似**数え上げ**
  - 2部グラフの完全マッチング, linear extension, 0-1ナップサック解…etc

ロータールーターモデル

- トークンを**順番に**ばらまく

ランダムウォーク　　ロータールーターモデル





単一頂点誤差に関する既存研究

$\chi_w^{(T)}$:RRMのトークン数(時刻T, 頂点w)	V:頂点集合
$\mu_w^{(T)}$:RWのトークン数の期待値(時刻T, 頂点w)	A:辺集合（多重辺含む）

Cooper et al. 2006	n次元整数格子点（無限）	$\left\|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right\| \le c_n$ $(c_1=2.29, c_2=7.29)$
Kijima et al. 2011	一般の遷移確率行列P （P:既約, 可逆, lazy）	$\left\|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right\| = O(\|V\|\|A\|)$
Akbari et al. 2013	d次元超立方体上	$\left\|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right\| = O(d^{1.5})$

総トークン数Mに依存しない！

何個トークンを遷移させても,

2次元整数格子点上なら7.29以上はズレない

ロータールーターは無理数が扱えない！

→ロータールーターモデルを一般化

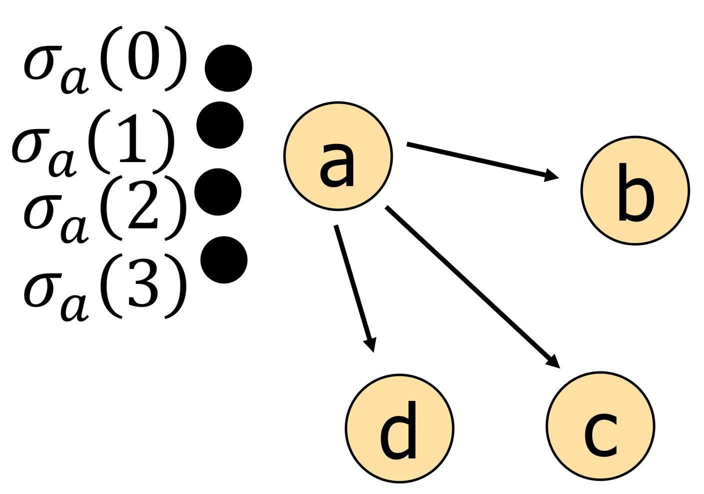
関数ルーターモデル

- トークンを**関数に従って**ばらまく

関数ルーター$\sigma_v(i)$ $(\in N(v))$

頂点vでi番目に発射されるトークンは$\sigma_v(i)$へ遷移

関数ルーターモデル



比率通りにトークンを発射するような関数を用いる！！

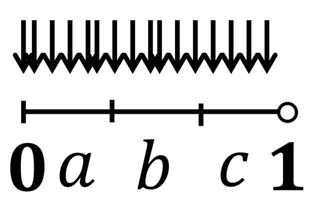
$\left|I_{v,u}[0,i)-i\cdot P_{v,u}\right|$が小さくなる

(vからuへ遷移するトークン数(i個中))

van-der-Corput列

$(i)_2$	$(\psi(i))_2$
0	0
1	0.1
10	0.01
11	0.11
100	0.001
101	0.101
110	0.011
…	…

i	$\psi(i)$
0	0
1	1/2
2	1/4
3	3/4
4	1/8
5	5/8
6	3/8
…	…



貪欲ルーター

貪欲ルーター　(Tijdeman, Angel et al.)

$T_i(v) = \{u \in N(v) \mid I_{v,u}[0,i)-(i+1)P_{v,u} < 0\}$

とし, $\frac{1+I_{v,u}[0,i)-(i+1)P_{v,u}}{P_{v,u}}$を最小化する

$u^* \in T_i(v)$を$\sigma_v(i)$とする

- **無理数を扱える！！**

主結果

Shiraga et al. 2013

P : エルゴード的, 可逆

$$\left|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right| \le \frac{3\pi_w}{\pi_{min}} t^* \Delta\Psi_\sigma$$

Δ:グラフの最大次数

t^*:Pの**混交度**

（mixing rate）

π:Pの定常分布

混交時間が小さいと誤差も小さい！

威力を発揮する構造	既存のバウンド（n:入力サイズ）	主定理
0-1ナップサック解	$O(2^n)$	$O(n^{5.5})$
Linear Extension	$O(n!)$	$O(n^4 \log n)$
G中のマッチング	$O(2^n)$	$O(n^6 \log n)$

Ψ_σ:比率との差

$max\left|I_{v,u}[x,x+y)-y\cdot P_{v,u}\right|$

貪欲ルーター	$\Psi_\sigma = 2$
van-der-Corput	$\Psi_\sigma = 2log\,(M+1)$
ロータールーター	$\Psi_\sigma = \max_v \tilde{\delta}(v)$