# フロンティア法の有向グラフへの適用：
# 強連結な部分グラフの列挙

北海道大学　　鈴木　浩史

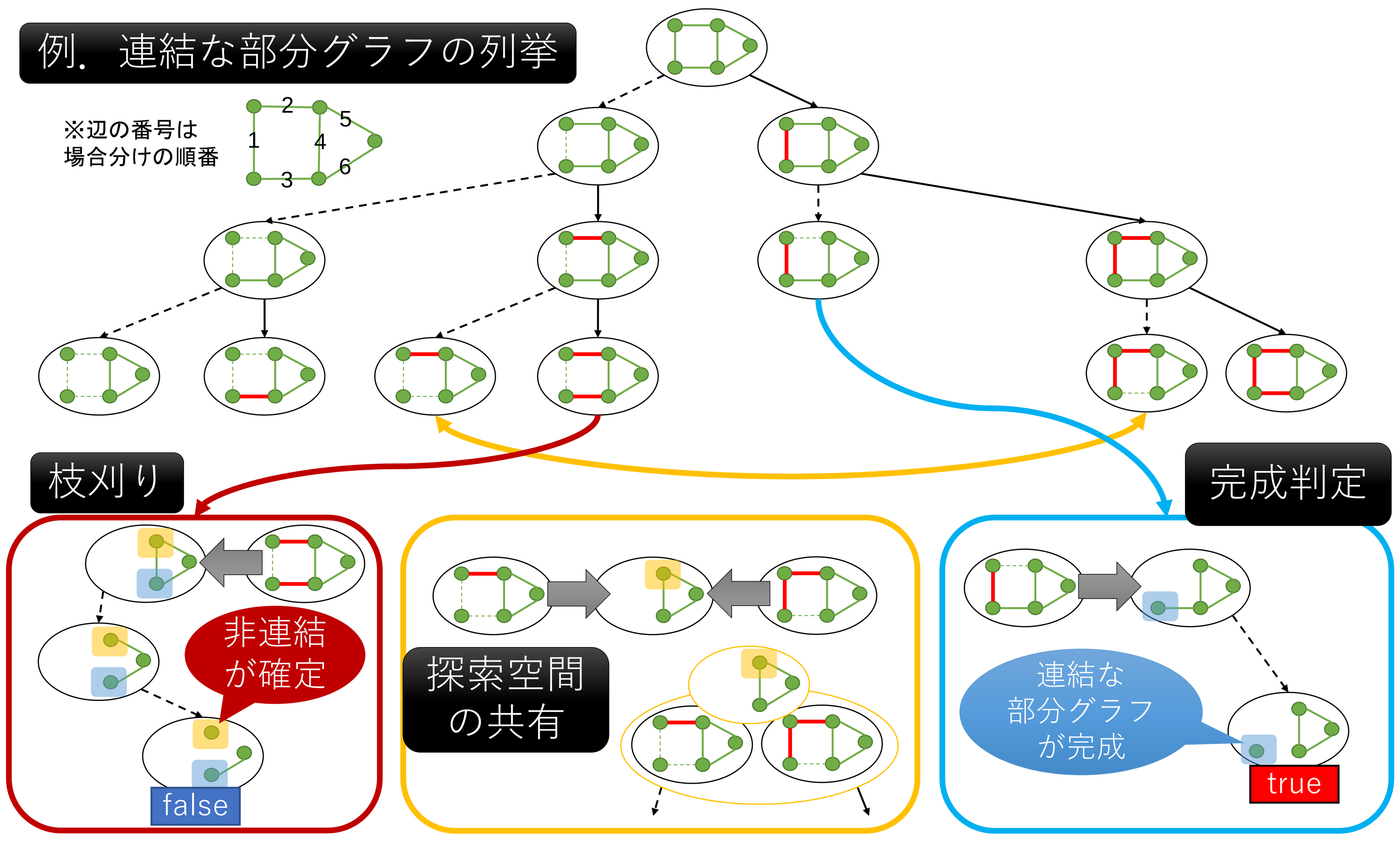
## 本ポスターの概要

フロンティア法と呼ばれる部分グラフ列挙技法に関するこれまでの研究成果は，特例を除いて無向グラフのみを対象としている．そのキーアイデアはmate配列である．本ポスターでは，

1. フロンティア法を有向グラフに適用することの難しさについて言及する．
2. mate配列に代わる新しいアイデアを提案し，強連結な部分グラフの列挙に用いる例を示す．

## フロンティア法 [1]

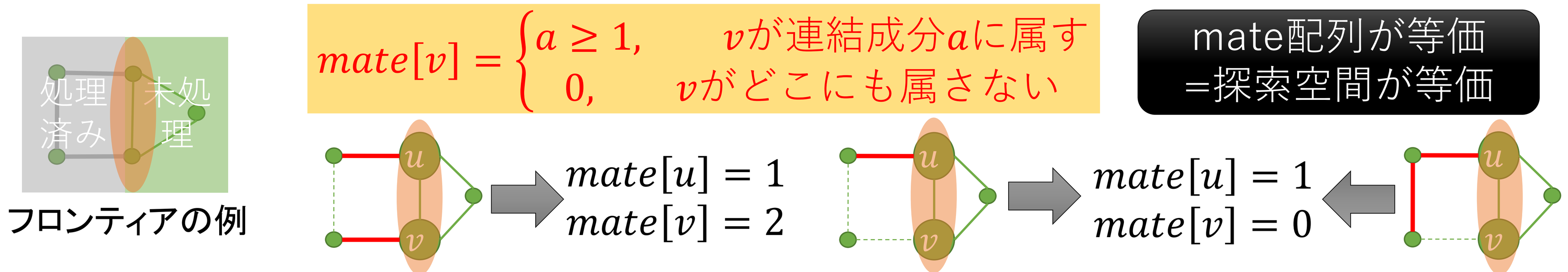
- 場合分け探索：枝刈り，等価な探索空間の共有，完成判定
- 場合分け構造がZDD（集合族を表現するデータ構造）に対応




- フロンティア：処理済み辺と未処理辺の境界
- mate配列：フロンティア上に定義し探索状態をエンコード

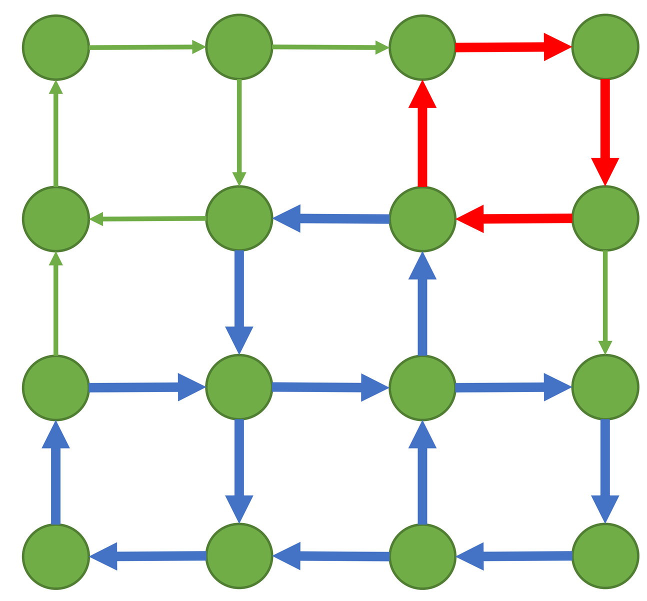
$$mate[v] = \begin{cases} a \geq 1, & v\text{が連結成分}a\text{に属す} \\ 0, & v\text{がどこにも属さない} \end{cases}$$

mate配列が等価＝探索空間が等価

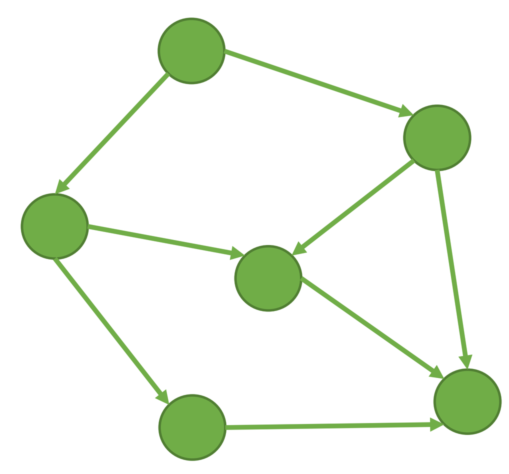



## 有向グラフをmate配列で扱えるか？

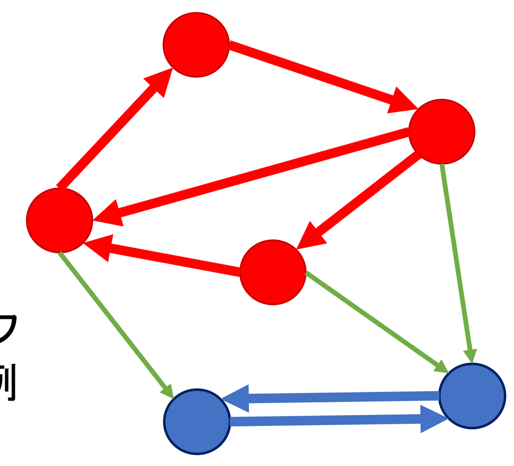
- 特例：パスやサイクルは扱える [2]
- フロンティア法の着眼点は「どこからどこへ到達可能か」という情報を管理することと考えられる
- 無向グラフの辺は双方向に行き来ができるので，mate配列で頂点のグループ分けを表現すれば十分だった
- 有向グラフでは（無向化したときの）グループが同じ頂点でも，到達可能な頂点集合が異なる場合がある
- これはmate配列では十分に表現できない



強連結なグリッドグラフと強連結な部分グラフの例



強連結な部分グラフが無いグラフの例（DAG）

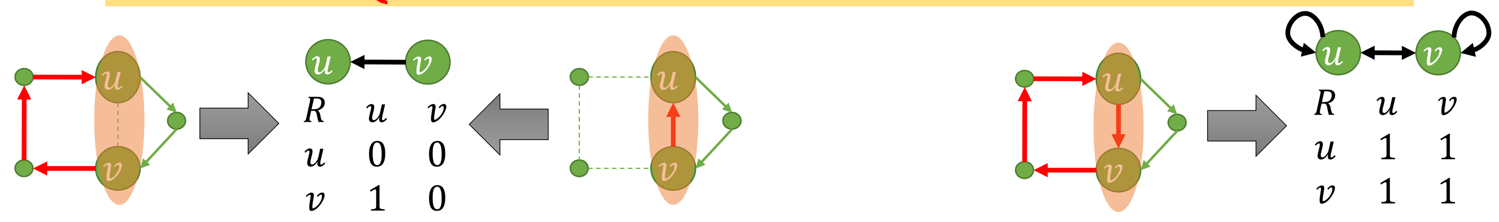


強連結で極大な部分グラフ（強連結成分）の例

## キーアイデア：reachability行列

- 各頂点について，所属成分を記憶する代わりに，到達可能な頂点集合（その頂点までのパスが存在）を記憶する

$$R_{u,v} = \begin{cases} 0, & u \rightarrow v\text{パスが存在する} \\ 1, & u \rightarrow v\text{パスが存在しない} \end{cases}$$



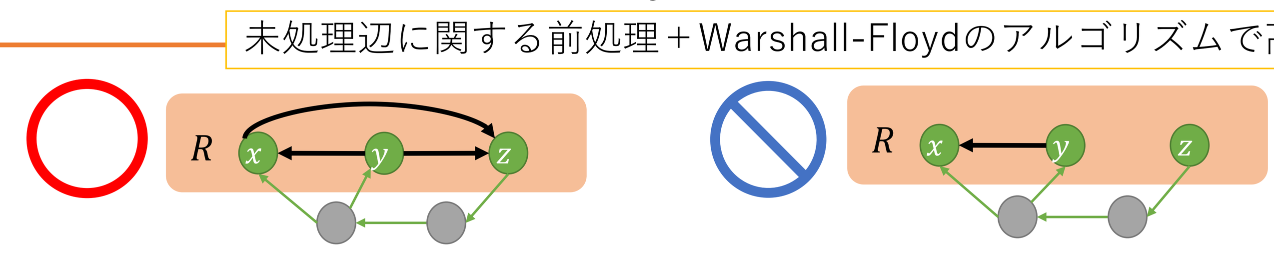

## 強連結な部分グラフの列挙

- 強連結：任意の2頂点間を行き来できる
- 以下では枝刈り条件と，完成条件を示す

**枝刈り条件**

$S = \{v \mid \exists u, R_{u,v} = 1 \vee R_{v,u} = 1\}$とする．
$R$が保存しているパスと，未処理辺を全て使ったとして，
$x \rightarrow y$パスを構成できない$x, y \in S$が存在するならば枝刈り

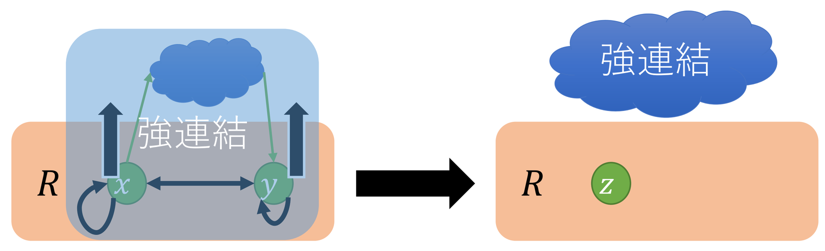
未処理辺に関する前処理＋Warshall-Floydのアルゴリズムで高速に判定可能



後々に強連結な部分グラフができることを保証している

**完成条件**

$S \neq \phi$であり，次のフロンティアには$S$が含まれない




フロンティアの外側に強連結な部分グラフが完成する

## 実験

- GraphDrawingの会議で使われたネットワーク
- 規則のあるグリッド（上の図）
- 環境：Inter® Core™ i7-3930K CPU 3.2GHz, 64GB RAM

| graph | #vertex | #arc | time (sec) | #node | #node (reduced) | #solution |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A95 Processor | 36 | 57 | 0.004 | 695 | 161 | 1,877,928 |
| B96 Telephone-calls (DAG) | 111 | 193 | 0.012 | 193 | 0 | 0 |
| D96 AT&T's WWW site | 180 | 229 | 0.027 | 577 | 26 | 18 |
| 2x2 grid | 4 | 4 | 0.000 | 7 | 4 | 1 |
| 4x4 grid | 16 | 24 | 0.003 | 312 | 187 | 1,542 |
| 6x6 grid | 36 | 60 | 0.065 | 15,881 | 9,421 | 8,403,590,917 |
| 8x8 grid | 64 | 112 | 5.658 | 911,277 | 552,603 | 138,078,436,557,437,682,633 |
| 10x10 grid | 100 | 180 | 500.820 | 55,329,349 | 34,847,435 | 6,497,679,215,187,785,291,242,620,314,131,359 |

## 今後の課題

- 強連結成分をすべて求めて，それぞれの成分内で列挙すれば十分⇒パフォーマンス向上
- 応用先はあるか

参考文献　[1]湊真一(編), ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト(著). “超高速グラフ列挙アルゴリズム―〈フカシギの 数え方〉が 拓く, 組合せ問題への新アプローチ―,” 森北出版, 2015.
[2] Knuth, “The Art of Computer Programming Vol.4”の演習問題