二分決定図と分配束

岡本 吉央　(東京工業大学)

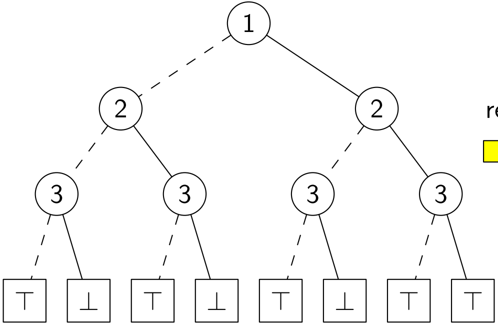
2010 年 5 月 28 日

内容

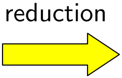
[既存]	二分決定図 (BDD, ZDD)	：	ブール束の部分集合の表現
↓ ↓			↓ ↓
拡張			拡張
↓ ↓			↓ ↓
[提案]			分配束の部分集合の表現

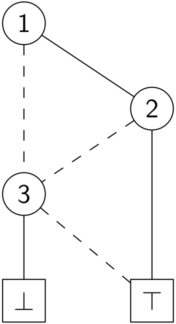
論理関数と BDD

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x_3}$$



Binary Decision Tree



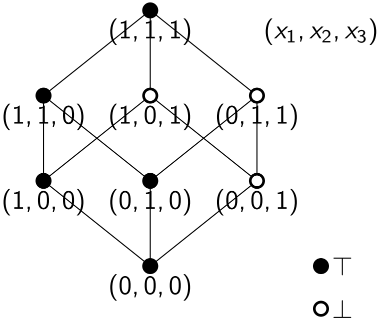


Binary Decision Diagram (BDD)

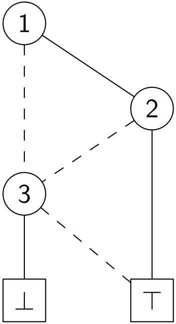
変数順序：$1 < 2 < 3$

論理関数とブール束

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x_3}$$



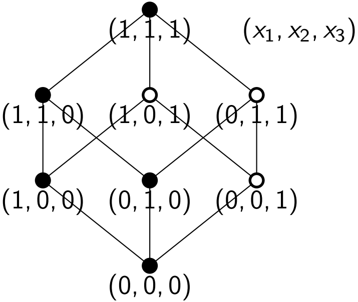
Boolean lattice

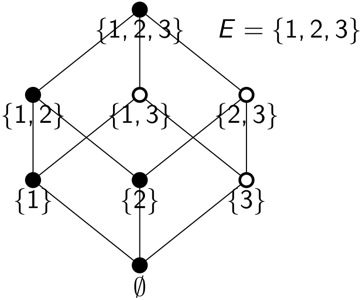


Binary Decision Diagram
(BDD)

ブール束

有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ がブール束であるとは，
$\mathcal{F} = 2^E$ を満たすことである



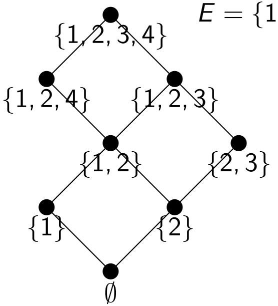


分配束：ブール束の一般化として

有限集合族 $\mathcal{D} \subseteq 2^E$ が**分配束**であるとは次を満たすことである

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$
2. $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{D}$

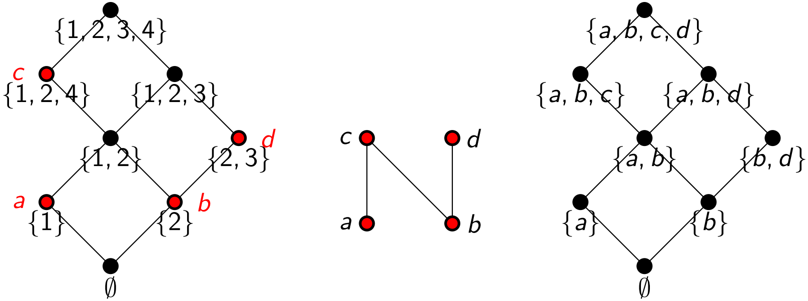
$E = \{1, 2, 3, 4\}$



注意：ブール束は分配束

分配束の性質：バーコフの表現定理 ('37)

任意の分配束はある半順序集合の順序イデアルの族と同型である

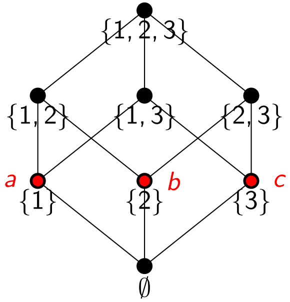


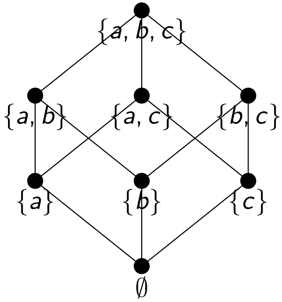
半順序集合 $(P, \leq)$ **の順序イデアルとは，集合** $X \subseteq P$ **で**

$$a \in X, b \leq a \qquad \Rightarrow \qquad b \in X$$

を満たすもの

バーコフの表現定理：ブール束の場合





分配束と離散構造

モデル化 (既知)

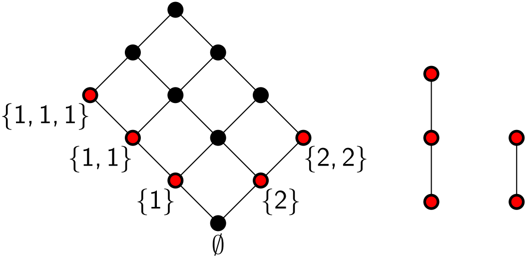
離散構造の中には，分配束を用いて自然に表現できるものが多い

- **格子**
- **カタラン構造**
  (Propp '97; Ferrari, Pinzani '05; Barcucci, Bernini, Ferrari, Poneti '05)
- **平面的構造** (Propp '93; Khuller, Naor, Klein '93; Felsner '04)
- **劣モジュラ構造** (Ore '56)
- **安定マッチング** (Gusfield, Irving, Leather, Saks '87)
- ……

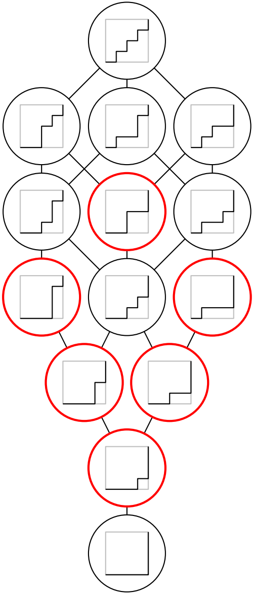
アルゴリズム (未知)

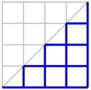
分配束上の BDD **があると便利では？**

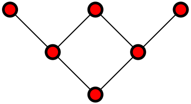
分配束の例：多重集合族 (格子)



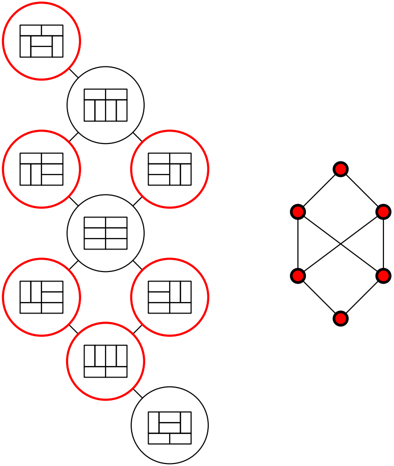
分配束の例：Dyck パス (カタラン構造)



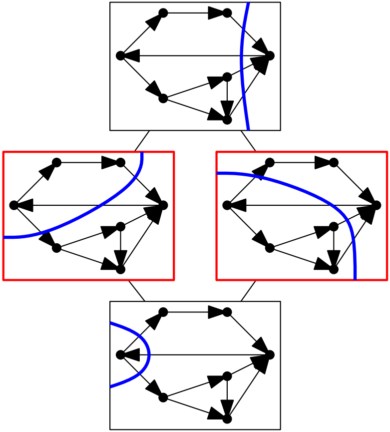


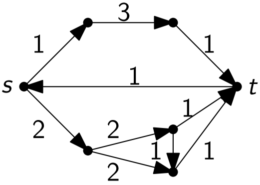


分配束の例：ドミノ・タイリング (平面的構造)

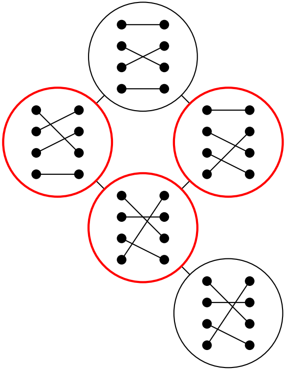


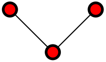
分配束の例：最小 st カット (劣モジュラ構造)





分配束の例：安定マッチング





preference lists			preference lists
$w_2 \succ w_3 \succ w_1 \succ w_4$	m_1	w_1	$m_1 \succ m_2 \succ m_4 \succ m_3$
$w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_4$	m_2	w_2	$m_3 \succ m_4 \succ m_2 \succ m_1$
$w_4 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_1$	m_3	w_3	$m_2 \succ m_4 \succ m_1 \succ m_3$
$w_1 \succ w_2 \succ w_4 \succ w_3$	m_4	w_4	$m_4 \succ m_3 \succ m_2 \succ m_1$

分配束と離散構造 (再掲)

モデル化 (既知)

離散構造の中には，分配束を用いて自然に表現できるものが多い

- 格子
- カタラン構造
  (Propp '97; Ferrari, Pinzani '05; Barcucci, Bernini, Ferrari, Poneti '05)
- 平面的構造 (Propp '93; Khuller, Naor, Klein '93; Felsner '04)
- 劣モジュラ構造 (Ore '56)
- 安定マッチング (Gusfield, Irving, Leather, Saks '87)
- ……

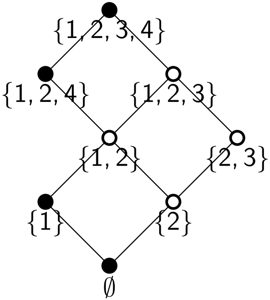
アルゴリズム (未知)

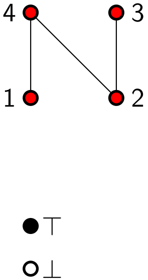
分配束上の BDD があると便利では？

分配束上の論理関数

- **分配束** $\mathcal{D} \subseteq 2^E$
- **分配束上の論理関数** $f\colon \mathcal{D} \to \{0,1\}$
- (**通常の論理関数** $f\colon 2^E \to \{0,1\}$)

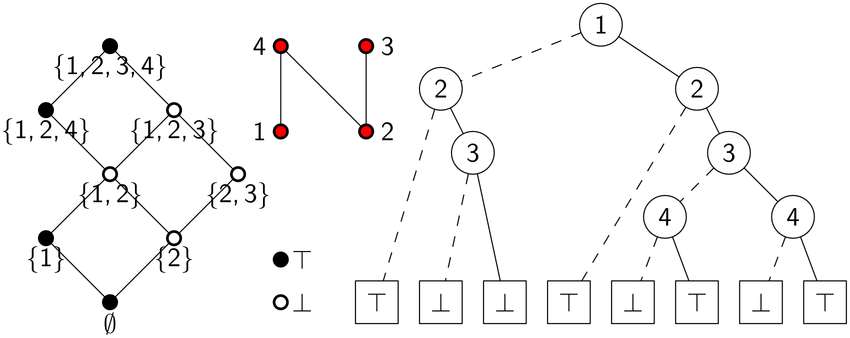
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$





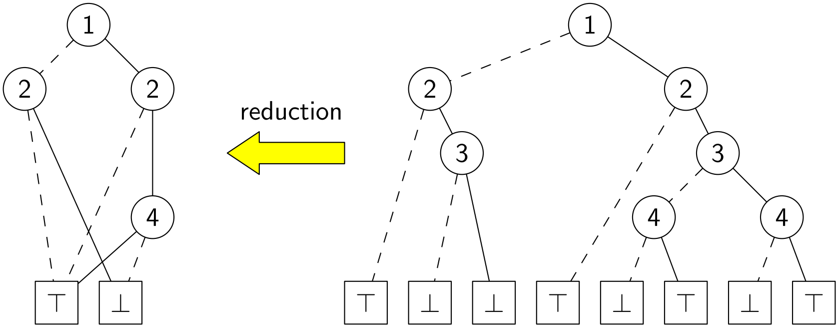
分配束上の論理関数と二分決定木

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$



分配束上の論理関数と二分決定図

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$



二分決定図の構成アルゴリズム

入力

- 分配束 $\mathcal{D}$ を表現する半順序集合 P
- 論理式 $f\colon \mathcal{D} \to \{0,1\}$ (の論理式表現)

出力

- $\mathcal{D}$ 上の f に対する二分決定図

アルゴリズムの戦略

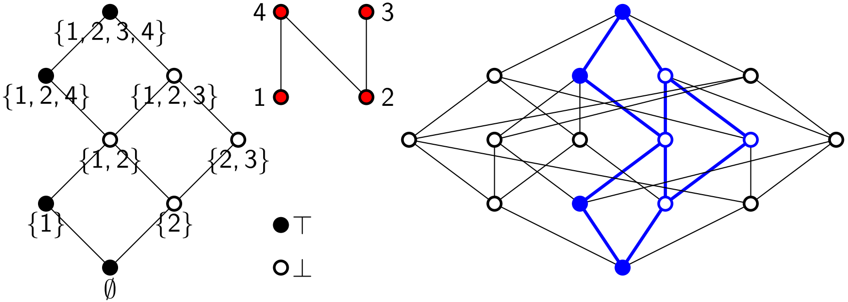
1. $\mathcal{D}$ をブール束に埋め込み，既存のアルゴリズムを動かす
2. 直接 $\mathcal{D}$ 上で構成する

(1) $\mathcal{D}$ をブール束に埋め込み，既存のアルゴリズムを動かす

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$

$$\downarrow$$

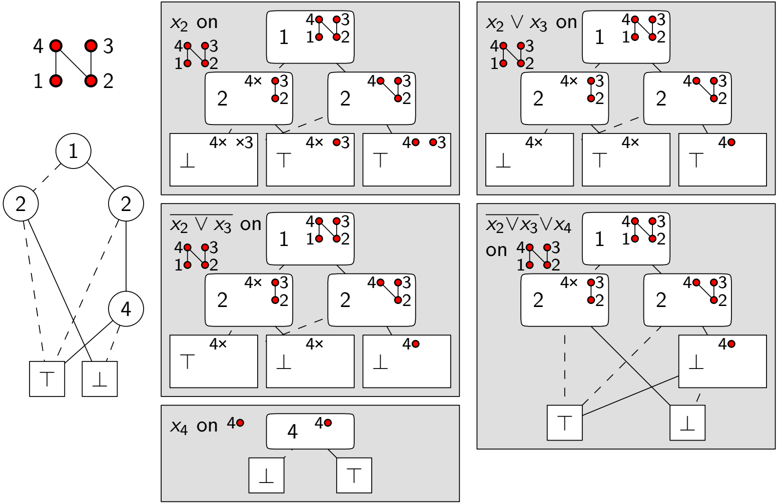
$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4) \wedge (x_4 \to (x_1 \wedge x_2)) \wedge (x_3 \to x_2)$$



(2) 直接 $\mathcal{D}$ 上で構成する：まだ練られてない

変数順序： $1 < 2 < 3 < 4$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad = \quad \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$



まとめ

提案

- 分配束に対する二分決定図

課題

- アルゴリズムの詳細の記述，計算量の解析
- より深い考察
- 適用範囲の調査
- 実装