

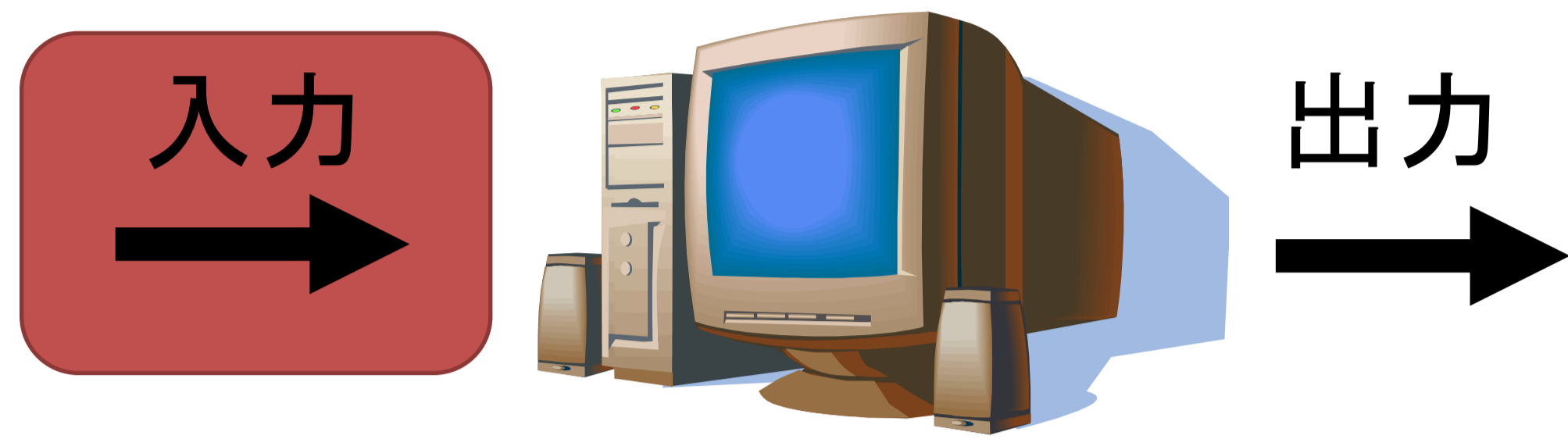
幾何的特徴を持つグラフクラスに対する効率のよいアルゴリズムの開発

斎藤 寿樹

ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト 研究員

ランダム生成(数え上げ)・列挙

計算機実験のテストデータ



偏ったテストデータを与えると、正しい解析結果が得られない。

提案アルゴリズム

Proper Intervalグラフのランダム生成と列挙
[斎藤, 山中, 清見, 上原, 2009]

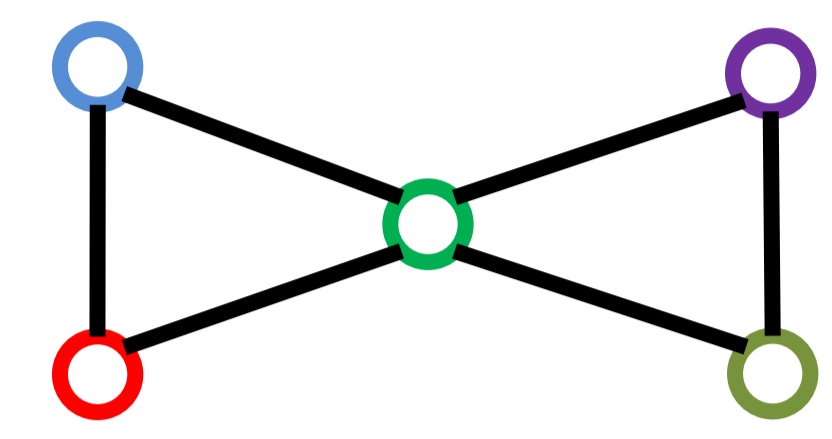
ランダム生成アルゴリズム

- 入力: 自然数 n
- 出力: n 頂点の連結なProper Intervalグラフ
- 一様ランダムに生成(同型性を考慮)
- 数え上げを利用
- $O(n+m)$ 時間

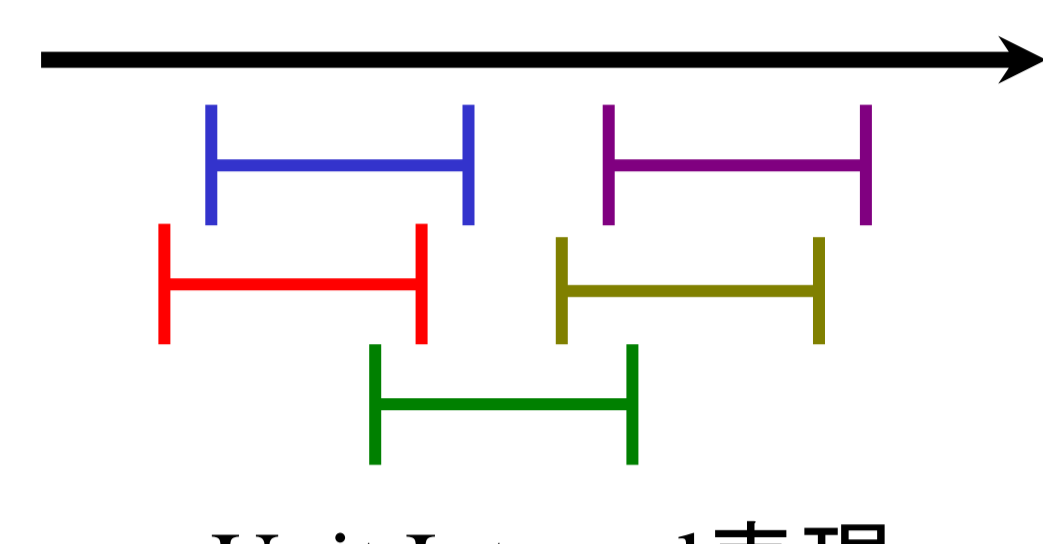
列挙アルゴリズム

- 入力: 自然数 n
- 出力: n 頂点の連結なProper Interval Graphを列挙
- 漏れなく、重複なく(同型性を考慮)
- 逆探索法[D. Avis and K. Fukuda, 96]を利用
- 1つあたり $O(1)$ 時間

Unit Interval表現と呼ばれる区間の集合を持つグラフ
 ・頂点は各数直線上の各区間と対応(区間の長さはすべて同じ)
 ・2頂点間に辺が存在する \Leftrightarrow 対応する2つの区間に重なりがある



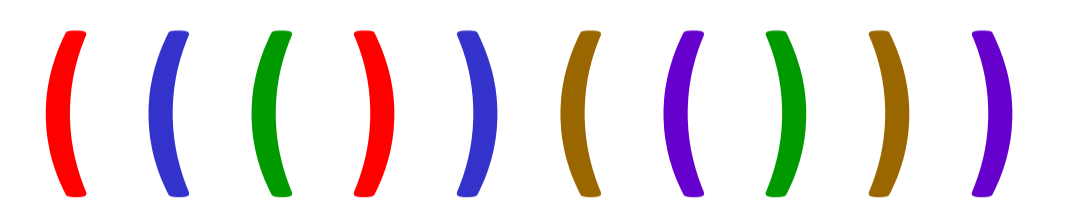
Proper Intervalグラフ



Unit Interval表現

Interval表現の各端点を左からスワイプすると左端点が見れる順番に右端点も見れる

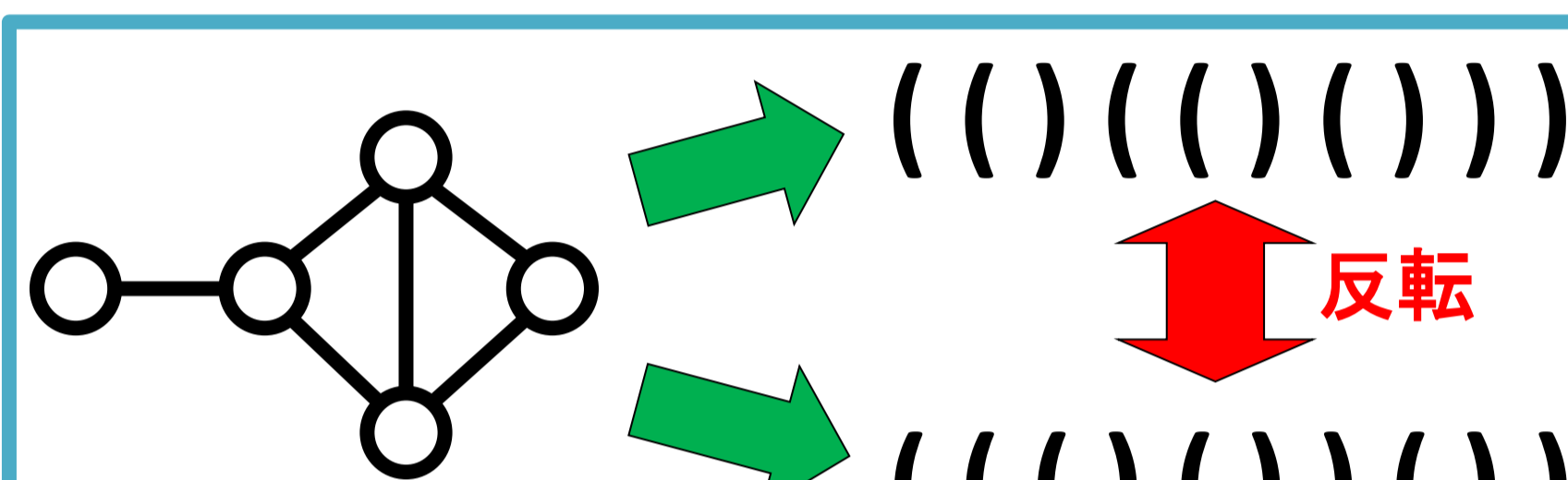
- Unit Interval表現をカッコ列で表現
- 左端点 \rightarrow "("
- 右端点 \rightarrow ")"



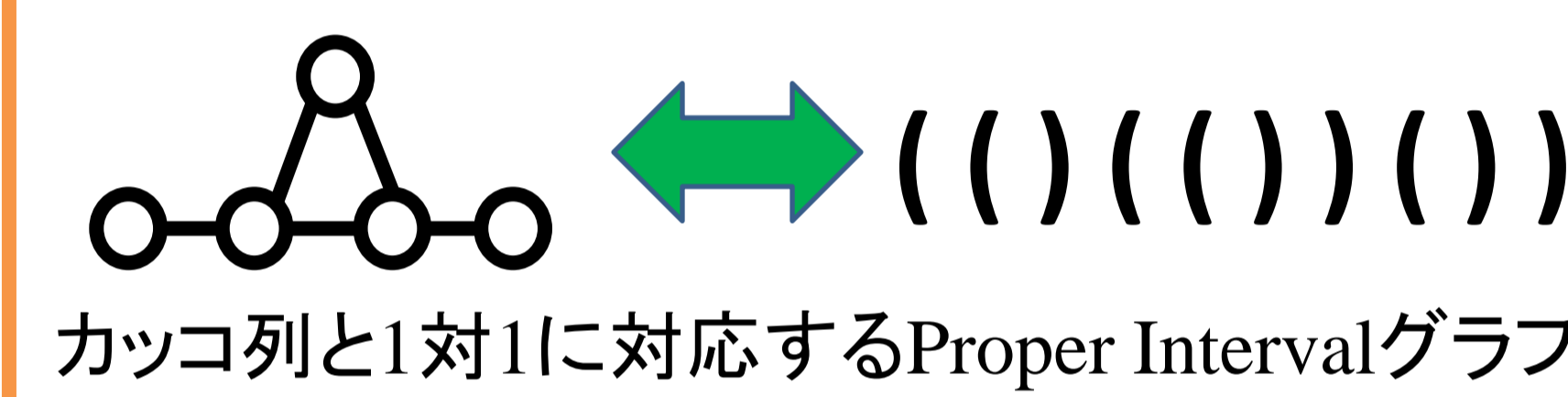
カッコ列表現

補題 [X. Dell, P. Hell, J. Huang, 1996]

連結なProper Intervalグラフは1つ、または2つのカッコ列表現を持つ



2つのカッコ列と対応するProper Intervalグラフ



カッコ列と1対1に対応するProper Intervalグラフ

アルゴリズムのアイデア

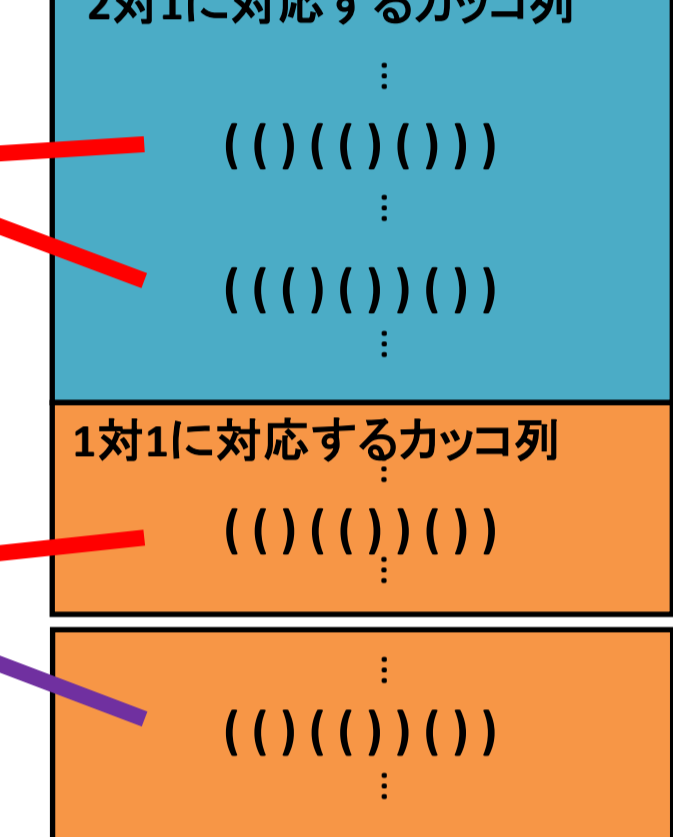
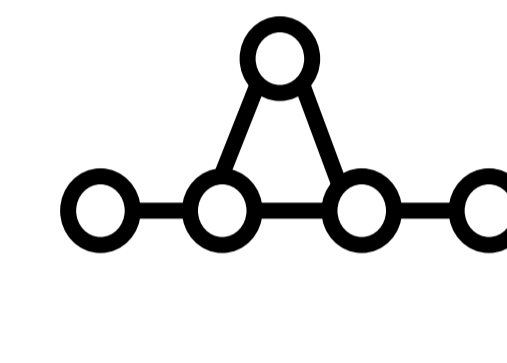
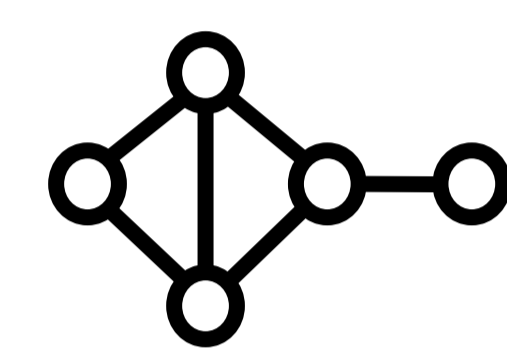
- カッコ列をランダム生成や列挙
- グラフとカッコ列が1対1に対応するわけではない!

ランダム生成アルゴリズム

せいきかくりつ せいきか
生起確率の正規化

$$S_n + R_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$R_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$



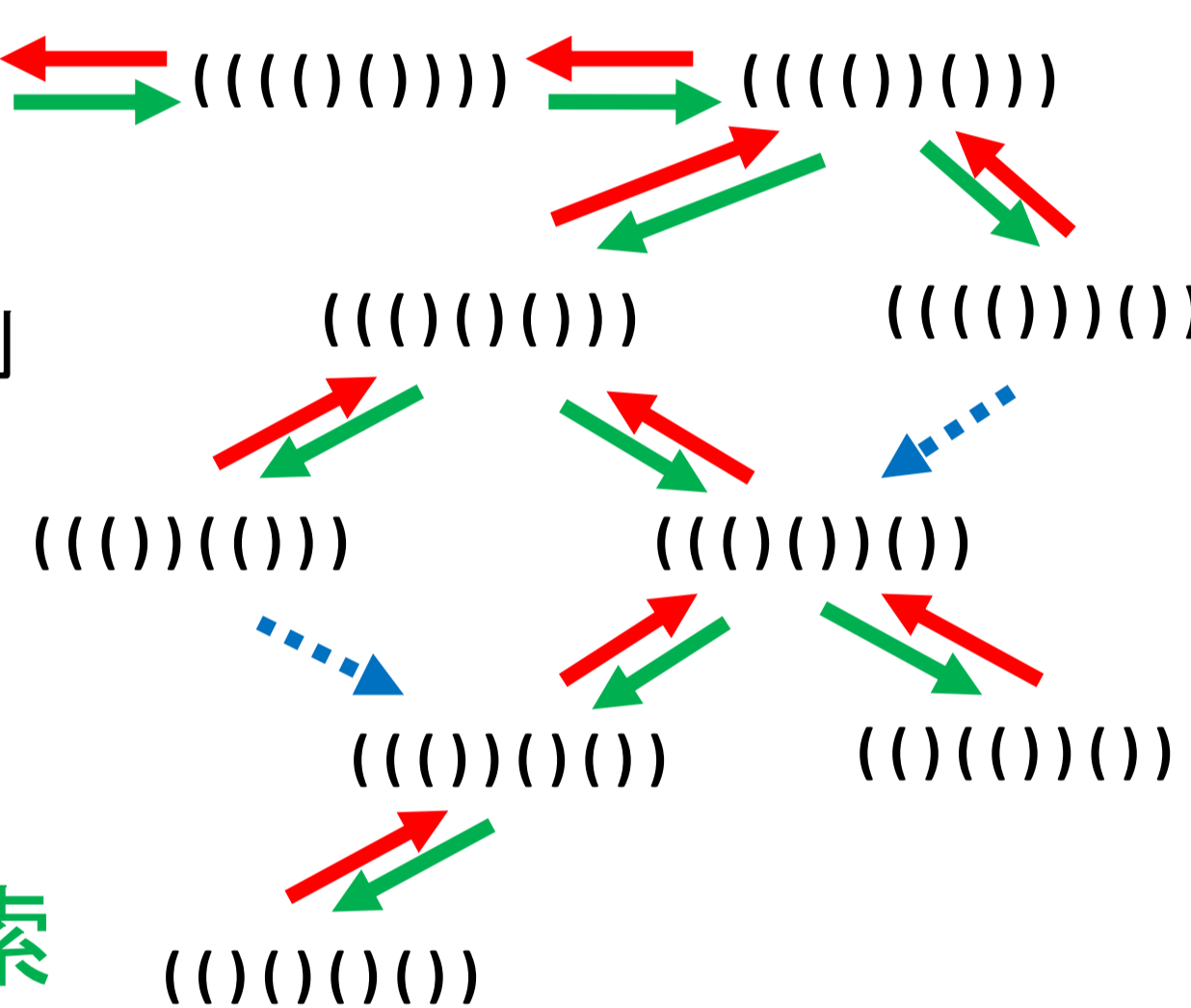
Case 1 確率: $\frac{S_n + R_n}{S_n + 2R_n}$

Case 2 確率: $\frac{R_n}{S_n + 2R_n}$

列挙

列挙木を構築

- ノード: Canonicalなカッコ列
- 根を定義
- 親を定義
- すべてのノードが親を持つ
- 親が一意に決まるように
- 根に近づくように



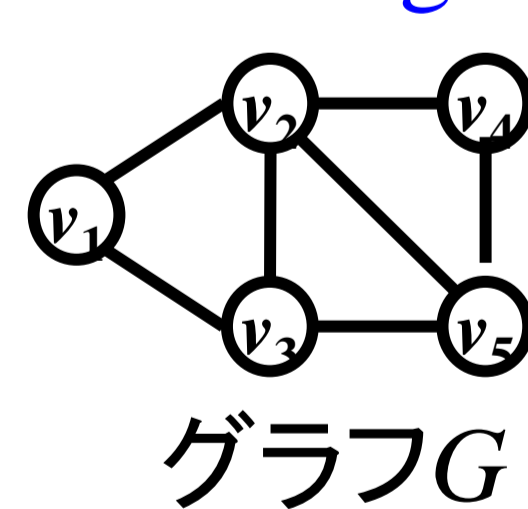
列挙木を根から探索

グラフ再構築問題

定義

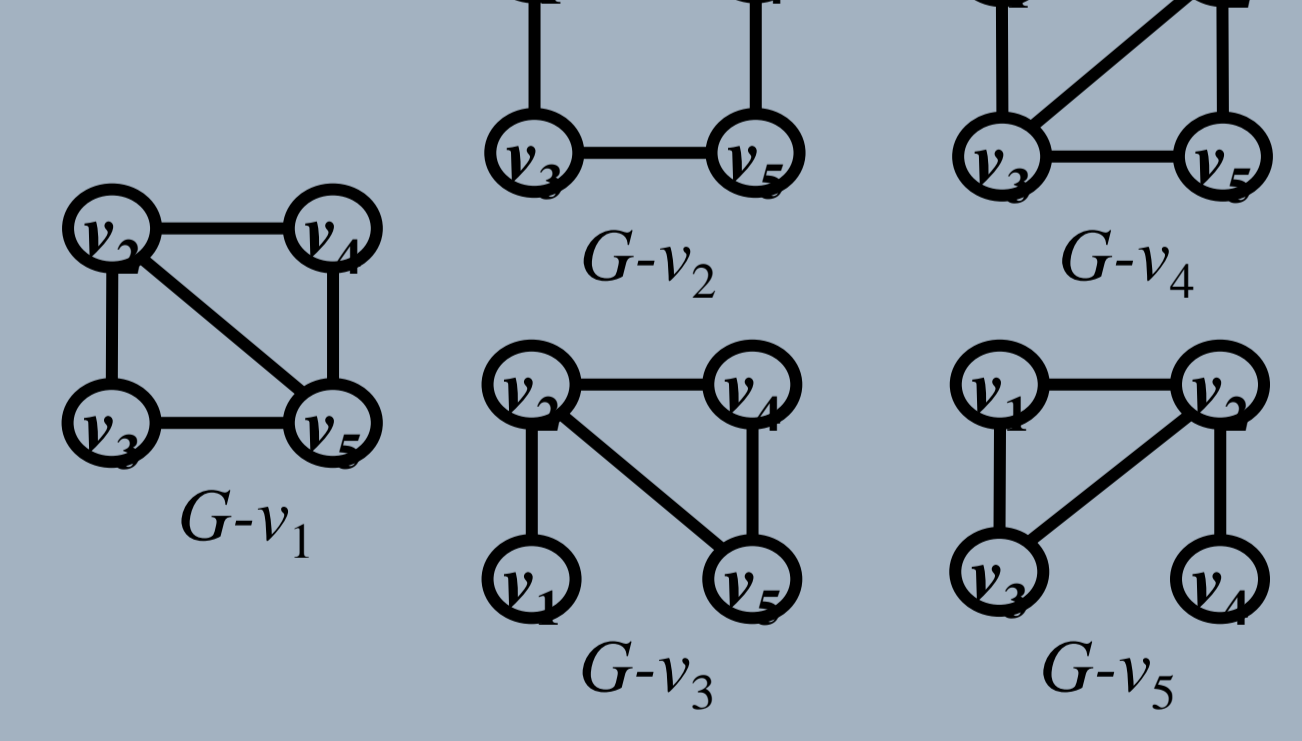
グラフ $G=(V, E)$ の Deck: グラフの多重集合 $\{G-v \mid v \in V\}$
 グラフの多重集合 D の Preimage: D を Deck とするグラフ

Preimage



グラフ G

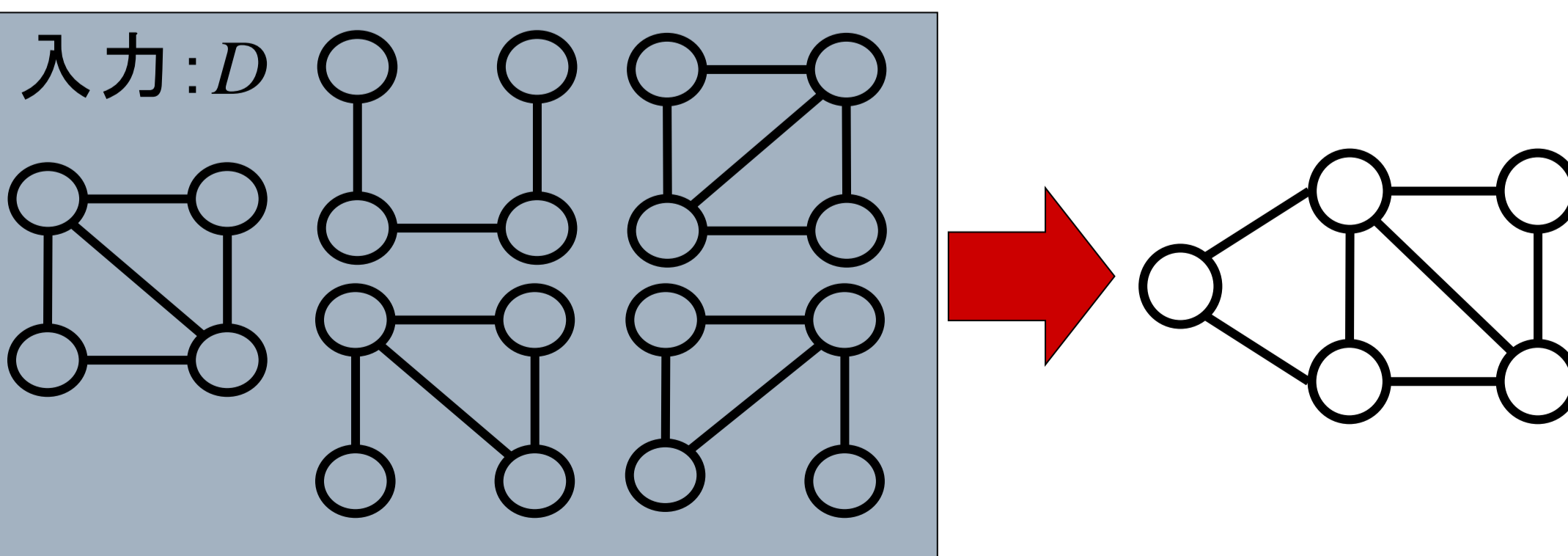
G の Deck



グラフ再構築問題

入力: $n-1$ 頂点の n 個のグラフ D

質問: D を Deck とする Preimage は存在するか?



グラフ再構築予想[1957年]

未解決問題!

$n-1$ 頂点のグラフが n 個与えられたとき ($n \geq 3$), それを Deck とする Preimage は高々一つ

既存の研究

- 予想が成立するグラフクラス
正則グラフ、木、非連結グラフなど
- 再構築可能なもの(一意に決定)
次数列、彩色数など

• グラフの同型性判定問題と深い関係

再構築問題は同型性判定問題以上に難しい

単純なグラフ再構築アルゴリズム

1. $G_i \in D$ を選択
2. G_i に頂点 v と v_i に接続する辺を追加 (G_i^v)
3. G_i^v の Deck D_i^v を作る
4. D_i^v と D が等しいかをチェック (Deck Checking)
 - 等しければ, D の Preimage は G_i^v
 - 等しければ, 2に戻る

グラフ再構築予想証明への足がかりとして多項式時間アルゴリズムの開発を行う

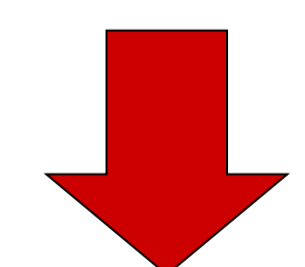
単純なアルゴリズムは遅い!

- ステップ2で G_i^v 候補が指数個
- ステップ4で同型性判定を使用

入力に制限:

同型性判定を多項式時間で行えるグラフクラス

多項式時間アルゴリズムの開発



グラフ再構築予想の証明

GI完全なグラフクラス

