

ZDDを用いたパスの列挙

～打倒Knuthを目指して～

斎藤 寿樹

ERATO湊離散構造処理系プロジェクト研究員

共同研究

鈴木 拓（北海道大学）

湊 真一（北海道大学・ERATO総括）

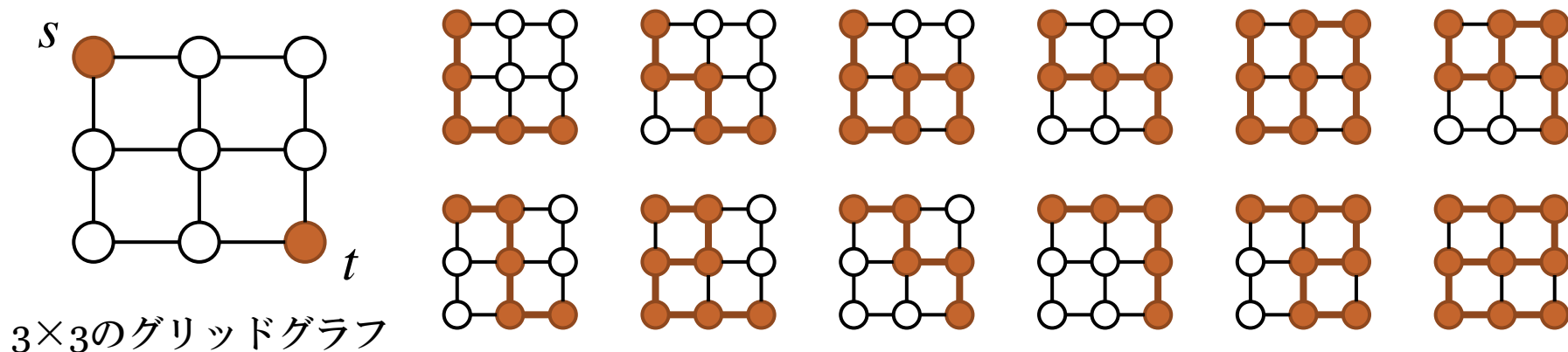
2010年11月30日(火)

自己紹介：斎藤 寿樹

- ERATO 研究員
 - 2010年4月～
- 博士号取得
 - 北陸先端科学技術大学院大学
 - 2010年3月
 - 指導教員：折り紙博士U先生
- 研究分野
 - グラフアルゴリズム
 - ・ グラフ同型性判定，ランダム生成・列挙，
グラフ再構築，部分グラフ同型性判定
- 最近の研究
 - VSOP(ZDDパッケージ)を使って遊ぶ！

パスの列挙

- 入力：グラフ $G=(V, E)$, 2頂点 s, t
- 出力： s から t までのパスを列挙（保持したZDD）



• ZDDの演算だけの単純なアルゴリズムを作れないか？

ZDDの演算のみを使ったパスの列挙

- 各頂点に対し，次の集合を定義
 - F_v : 頂点 s から v へのパスの集合

Procedure Update

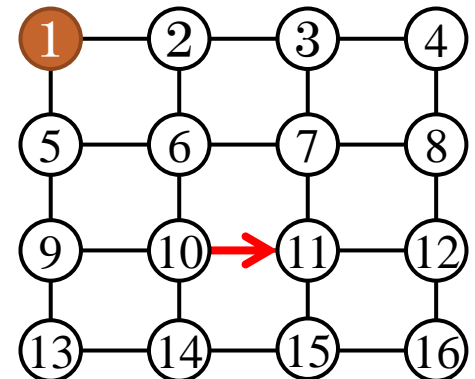
$I(v)$: 頂点 v の接続辺集合

1. 各辺 $e_{u,v}$ に対し，以下を繰り返す

2. $F_v = F_v \cup ((F_u \bmod I(v)) \text{ join } \{e_{u,v}\})$

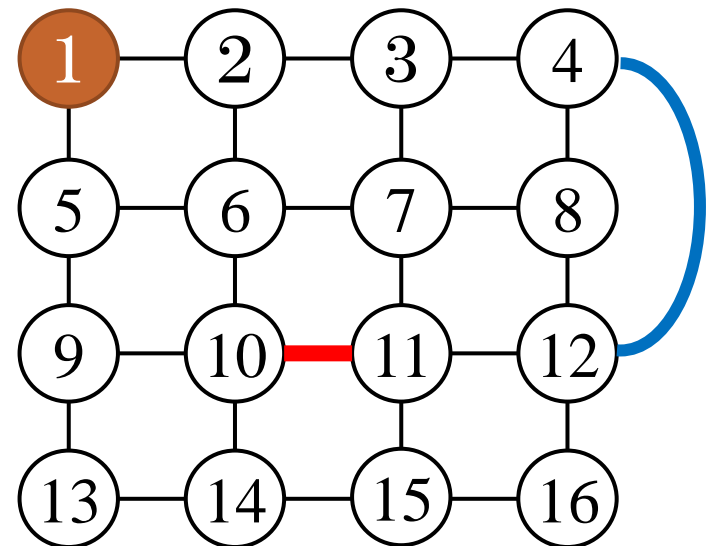
- 頂点 u に接続している辺を使わない v を終点とするパス
- 上のパスに $e_{u,v}$ を追加した u を終点とするパス

Procedure Update をすべての F_v が収束するまで繰り返す



応用例

- **辺が断裂**してもすぐ対応できる
- **新たな頂点や辺を追加**しても，簡単に更新できる
- 次の経路の列挙が簡単にできる
 - 頂点 s を端点とするハミルトンパス
 - 頂点 s を含んだサイクル
 - ハミルトンサイクル



計算機実験

Integer Sequences:

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>

cypath

Displaying 1-1 of 1 results found.

page 1

Format: [long](#) | [short](#) | [internal](#) | [text](#)

Sort: [relevance](#) | [references](#) | [number](#)

Highlight: [on](#) | [off](#)

[A007764](#) Number of nonintersecting (or self-avoiding) rook paths joining opposite corners of an $n \times n$ grid. +0
9

1, 2, 12, 184, 8512, 1262816, 575780564, 789360053252, 3266598486981642,
41044208702632496804, 1568758030464750013214100, 182413291514248049241470885236,
64528039343270018963357185158482118 ([list](#); [graph](#); [listen](#))

OFFSET 0,2

COMMENT The length of the path varies.

REFERENCES S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge, 2003, pp. 331-339.

D. E. Knuth, personal communication.

Netnews group rec.puzzles, Frequently Asked Questions (FAQ) file. (Science Section).

D. E. Knuth, 'Things A Computer Scientist Rarely Talks About,' CSLI Publications, Stanford, CA, 2001, pages 27-28.

8

64

789,360,053,252

1603.251

(27分弱)

(19分弱)

今後の課題

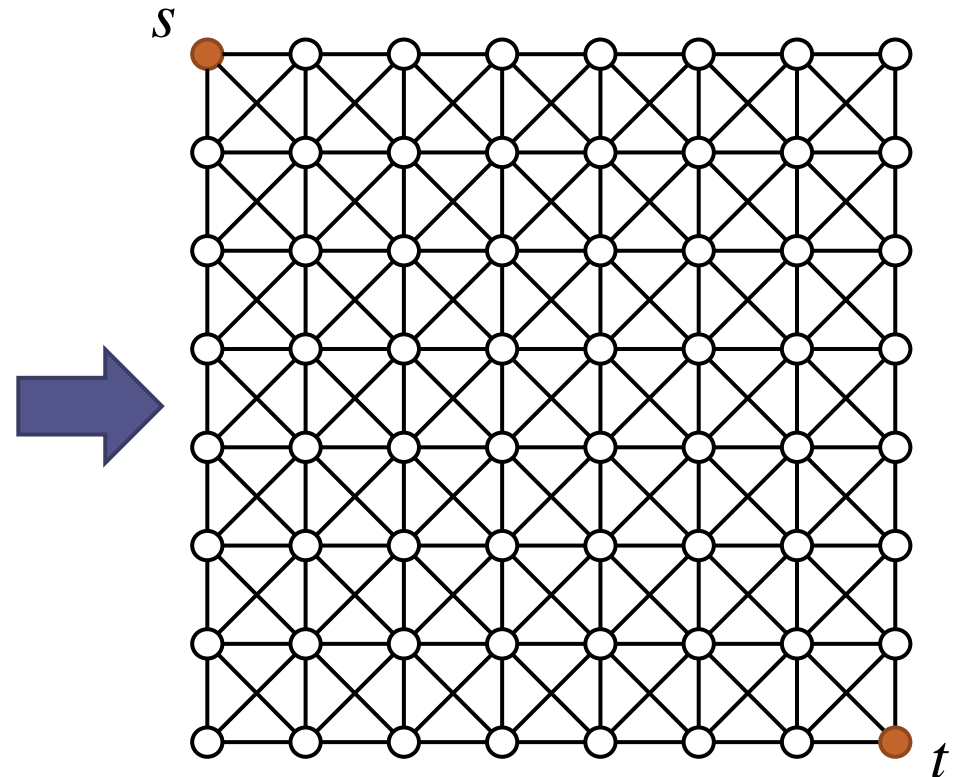
- アルゴリズムの改良・理論的な解析
- その他の手法との比較
 - Knuth法(The Art of Computer Programming 7.1.4)
 - Counting the Number of Paths in a Graph via BDDs [Sekine and Imai, 97]
 - The Theory of Zero-Suppressed BDDs and the Number of Knight's Tours [Schroer and Wegener 98]
- その他のグラフ構造の列挙
 - コードレスパス・サイクル
 - 全域木
 - 独立点集合, マッチング などなど
- 実応用への適用
- “しりとり”をすべて列挙せよ！
 - 既存研究：最も長いしりとり
 - トリビアの種 (2004年3月3日)
 - 75,575語 (単語数：15万4150語)
 - 最後の単語：るすばん

The Art of Computer Programming 7.1.4

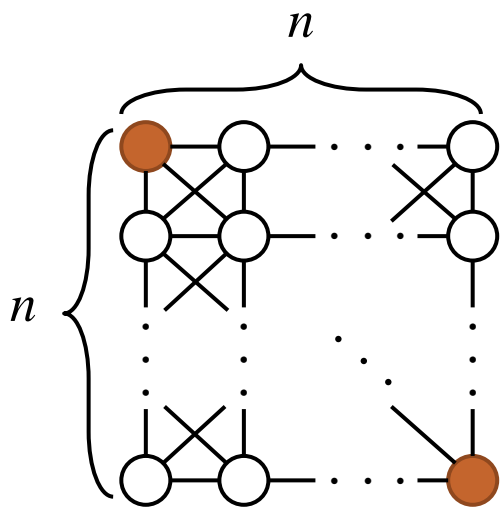
- Exercise 231 (King travel)
 - キングの旅行経路をすべて列挙せよ
 - ある角から反対側の角までの経路
 - 同じセルは二度通ってはいけない

キング

| | a | b | c | d | e | f | g | h | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | | | 8 |
| 7 | | | | | | | | | 7 |
| 6 | | | | | | | | | 6 |
| 5 | | | ● | ● | ● | | | | 5 |
| 4 | | | ● | ♔ | ● | | | | 4 |
| 3 | | | ● | ● | ● | | | | 3 |
| 2 | | | | | | | | | 2 |
| 1 | | | | | | | | | 1 |
| | a | b | c | d | e | f | g | h | |



Exercise 231 実験結果



| n | パスの数 | 計算時間(sec) |
|-----|--------------------|-----------|
| 1 | 1 | 自明 |
| 2 | 5 | 0.017 |
| 3 | 235 | 0.035 |
| 4 | 96,371 | 0.999 |
| 5 | 447,544,629 | 37.114 |
| 6 | 22,132,498,074,021 | 3185.362 |
| 7 | | |
| 8 | | |

Exercise 231 Integer Sequences

Greetings from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#)

[Hints](#)

Search: **1, 5, 235, 96371, 447544629, 22132498074021**

Displaying 1-1 of 1 results found.

page 1

Format: [long](#) | [short](#) | [internal](#) | [text](#) Sort: [relevance](#) | [references](#) | [number](#) Highlight: [on](#) | [off](#)

[A140518](#) Number of simple paths from corner to corner of an $n \times n$ grid with king-moves allowed. +20
1

1, 5, 235, 96371, 447544629, 22132498074021, 10621309947362277575,

50819542770311581606906543 ([list](#); [graph](#); [listen](#))

OFFSET 1,2

COMMENT This graph is the "strong product" of P_n with P_n , where P_n is a path of length n . Sequence [A007764](#) is what we get when we restrict ourselves to rook moves of unit length.
Computed using ZDDs (ZDD = "reduced, order, zero-suppressed binary decision diagram").

REFERENCES D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Section 7.1.4, in preparation.

EXAMPLE For example, when $n=8$ this is the number of ways to move a king from a1 to h8 without occupying any cell twice.

CROSSREFS Adjacent sequences: [A140515](#) [A140516](#) [A140517](#) this_sequence [A140519](#) [A140520](#) [A140521](#)

Sequence in context: [A157710](#) [A137085](#) [A153025](#) this_sequence [A174767](#) [A142732](#) [A085115](#)

KEYWORD nonn

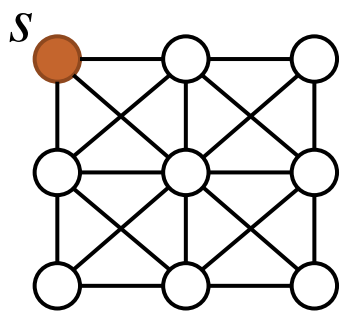
AUTHOR D. E. Knuth, Jul 26 2008

page 1

Exercise 232 (King's tours)

- キングの周遊(サイクル)経路をすべて列挙せよ
 - すべてのセルを通らなければならない
 - 同じセルは二度通ってはいけない
 - ハミルトンサイクル

先ほどのアルゴリズムはそのまま使えない！



頂点 s から始まり，頂点 s で終わる経路

ハミルトンサイクルである条件

- 連結成分が一つ
- すべての頂点の次数が 2

Exercise 232 (King's tours)

- アルゴリズム
 - F_v : 頂点 s から v への「すべての」パスの集合
 - $C_2 = (F_2 \text{ mod } \{\{e_{s,2}\}\}) \text{ join } \{\{e_{s,2}\}\}$
 - $C_3 = (F_3 \text{ mod } \{\{e_{s,3}\}\}) \text{ join } \{\{e_{s,3}\}\}$
 - $C_4 = (F_4 \text{ mod } \{\{e_{s,4}\}\}) \text{ join } \{\{e_{s,4}\}\}$
 - $F = C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (F は頂点 s と連結なすべてのサイクル)
 - F の中からすべての頂点の次数が2のものを取り出す
 - ・ 除算とJoinを使って、がんばればできる！

