

定数時間アルゴリズムとBDD

伊藤大雄 楠本 充
京都大学 大学院 情報学研究科

2011.6.11
湊離散構造処理系2011初夏のワークショップ

決定問題と最適化問題

- 決定問題の例：連結性判定問題
 - 入力：グラフG
 - 要請：Gが連結であるか判定せよ（YesかNoか）
- 最適化問題の例：最大マッチング問題
 - 入力：グラフG
 - 要請：Gのマッチングの最大サイズを求めよ（数値）
- 一般的要請：入力長 n に対し、計算時間 $T(n)$ がなるべく小さいアルゴリズムを設計せよ。

定数時間アルゴリズムとは

- これまでの常識：入力をすべて見なければ話にならない。つまり $T(n) = \Omega(n)$.
- しかし、一部を見るだけで、判断できないか？
 - e.g., モンテカルロ法、サンプリング調査、料理の味見・・・



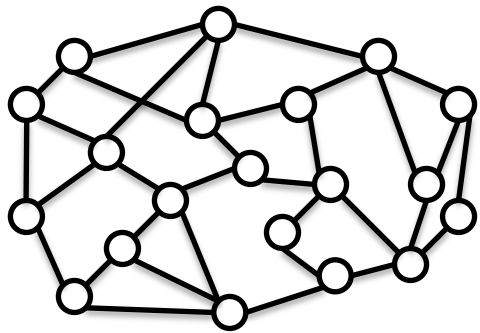
- n に無関係の定数個のデータを見るだけで判断！
 - つまり $T(n) = O(1)$.
 - 理論的保証。（ヒューリスティックスでは無い。）
 - 確率アルゴリズム。
 - ウェブグラフ、ゲノムなど超巨大情報が簡単に扱える。

性質検査(property testing)

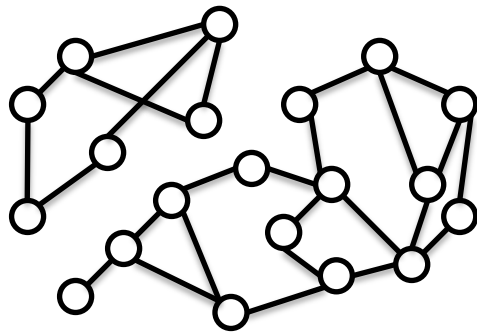
- 判定問題(YesかNoか)の緩和→性質検査(property testing)
- 例えば、 n 個の節点、 m 本の枝からなるグラフが連結であることを、 n, m に無関係な定数個のデータを見るだけで検査する。
- 直感的には「不可能」。(見ていない所に枝が1本あるだけで、結果が変わる。)
- →多少の不正確さを許容することで、可能にする。

性質検査の考え方

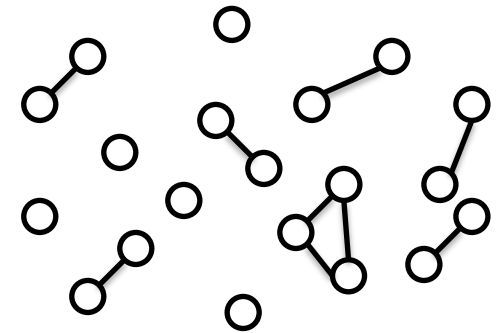
- 考え方1：大まかな区別がつけば良い



連結



中間(ϵ -close)



連結にほど遠い(ϵ -far)

距離 ϵ 以上を区別 ($0 < \forall \epsilon < 1$)

- 考え方2：確率的に判定
 - (任意の入力に対し)確率 $2/3$ 以上で正解を出す。

過去の重要な成果

- 密グラフモデルにおいて
 - 定数時間検査可能 \leftrightarrow モノトーンな (i.e., 節点と枝の削除で保存される) 性質 [Alon, et al., STOC06]
 - Szemerédi's [Regularity Lemma](#) [1975]
- 疎グラフモデル (d: 次数上限) において
 - [マイナークローズド](#)な (i.e., モノトーン+枝の縮約で保存される) 性質は検査可能 [Benjamini, Schramm, Shapira; STOC08]
 - [マイナークローズド](#)ならば[Hyperfinite](#)である。
 - [マイナークローズド](#)な性質は $O(d^{\text{poly}(d/\epsilon)})$ クエリで検査可能 [Hassidim, et al.; FOCS10]
 - [パーティショニングオラクル](#)
 - Hyperfiniteなグラフ (注: [マイナークローズド](#)を含む) に対しては[全ての性質](#)が検査可能 [Newman & Sohler; STOC11]

我々の主な成果

- 全て疎グラフモデル (d : 次数上限)
 - k -点連結性検査 [Yoshida & I, ICALP08]
 - 最大マッチングサイズの $O((d/\epsilon)^{1/\epsilon})$ 時間 $(1, \epsilon n)$ 近似 [Yoshida, Yamamoto, I, STOC09]
 - $O(d)$ 時間枝刈り局所探索オラクル
 - 外平面性の $O(\text{poly}(1/\epsilon))$ 時間検査 [Yoshida & I; RANDOM10]
 - 非自明なマイナークローズドな性質検査で初のパラメータの多項式の計算時間
 - CSPのサブリニア近似のタイトな上下限 [Yoshida; STOC11]
 - ナップサック問題の定数時間近似 [I, Kiyoshima, Yoshida; submitted]
 - NP困難問題の制限無し初の定数時間近似
 - (k, L) - sparsity matroidの定数時間ランク $(1, \epsilon n)$ 近似 [I, Tanigawa, Yoshida; submitted]
 - 剛性判定など広範囲を含むマトロイド

xDDに関する定数時間アルゴリズム

- サーベイしました。
- 論理関数を入力（クエリ）として、幅 w のBDDで表現できるかの検査の結果がかなりやられている。
- その他の問題は見つからないので、挑戦する意味があるかもしれない。
- 例：xDDを入力（クエリ）として、性質を検査。
- 有向グラフ（注：xDDを含む）の検査はほとんど無いので、今後進めていく。
- 詳しくはポスターセッションにて。