πDDを用いたあみだくじの多重列挙

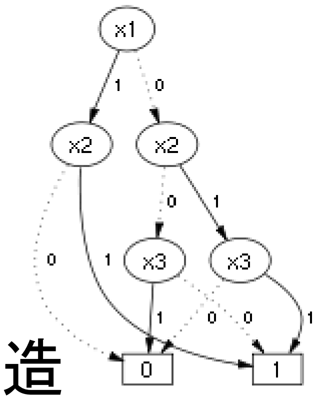
川原 純　(JST ERATO 研究員)

○ 斎藤 寿樹 (JST ERATO 研究員)

湊 真一　(北海道大学・JST ERATO総括)

(50音順)

○DD



BDD (Binary Decision Diagram) (二分決定グラフ)	論理関数を表すデータ構造 $F = (x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3) + x_2\, x_3\, x_4$
ZDD (Zero-suppressed BDD)	集合の集合を表すデータ構造 S = {{a, b, c, d}, {a, b}, {a, c}, {c, d}}
πDD	順列（置換）の集合を表すデータ構造 P = {(4, 2, 1, 3), (2, 3, 1, 4), (3, 4, 1, 2)}

置換の表し方

(4, 2, 1, 3)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

互換

2つの数字だけを交換する置換

(1, 2, 6, 4, 5, 3, 7)

$$\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ \downarrow & \downarrow \\ 6 & 3 \end{array}$$

τ_{36} と表記

置換の積

(1, 3, 2) × (3, 1, 2) = (3, 2, 1)

$$\begin{array}{cccl} 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & (1, 3, 2) \\ 1 & 3 & 2 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & (3, 1, 2) \\ 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

置換と互換

任意の置換は互換の積で表される

$$(3, 4, 2, 1) = \tau_{23}\,\tau_{13}\,\tau_{14}$$

$$= \tau_{12}\,\tau_{13}\,\tau_{23}\,\tau_{14}\,\tau_{24}$$

一意ではない

以下の形への分解は一意

$$(3, 4, 2, 1) = \tau_{12}\,\tau_{23}\,\tau_{14}$$

$$<\quad<$$

各 τ_{xy} ： $x < y$

標準分解と呼ぶ

$$(3, 4, 2, 1) = (3, 1, 2, 4)\ \tau_{14}$$

$$= (2, 1, 3, 4)\ \tau_{23}\,\tau_{14}$$

$$= \tau_{12}\,\tau_{23}\,\tau_{14}$$

置換の集合

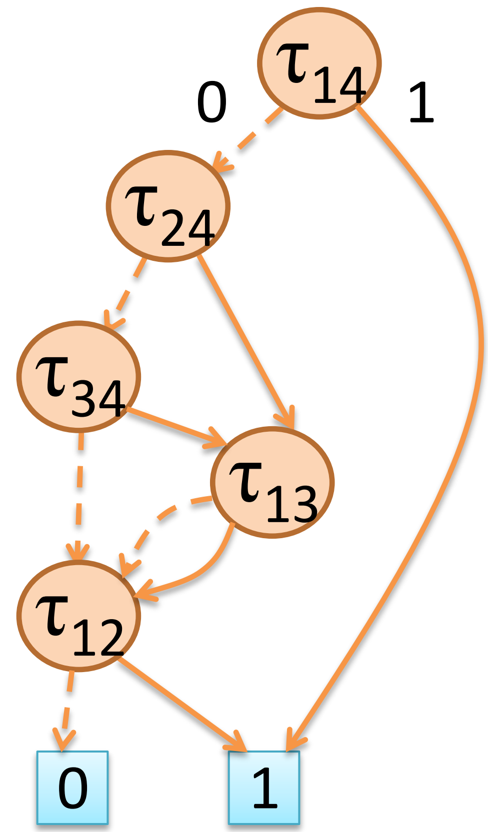
P = {(4, 2, 3, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2),
(2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)}

を効率の良いデータ構造で記憶したい

各要素を標準分解する

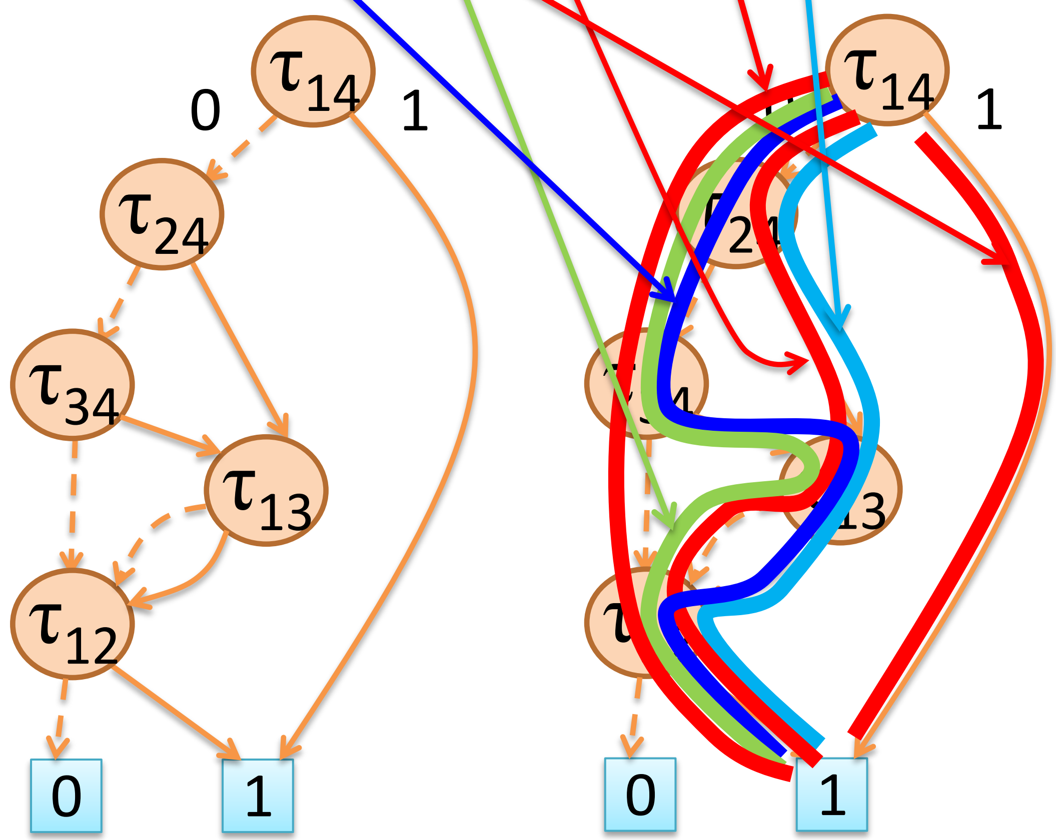
$P = \{ \tau_{14}, \tau_{12}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{34}, \tau_{12}\tau_{34}, \tau_{12} \}$

τ の集合の集合と考えて、ZDDで表す



$$P = \{(4, 2, 3, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2), (2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)\}$$

$$= \{\tau_{14},\ \tau_{12}\tau_{24},\ \tau_{12}\tau_{13}\tau_{24},\ \tau_{12}\tau_{13}\tau_{34},\ \tau_{12}\tau_{34},\ \tau_{12}\}$$



$\boxed{1}$ へのパス1本が

1つの要素に対応

1枝 ↓ を通るときの

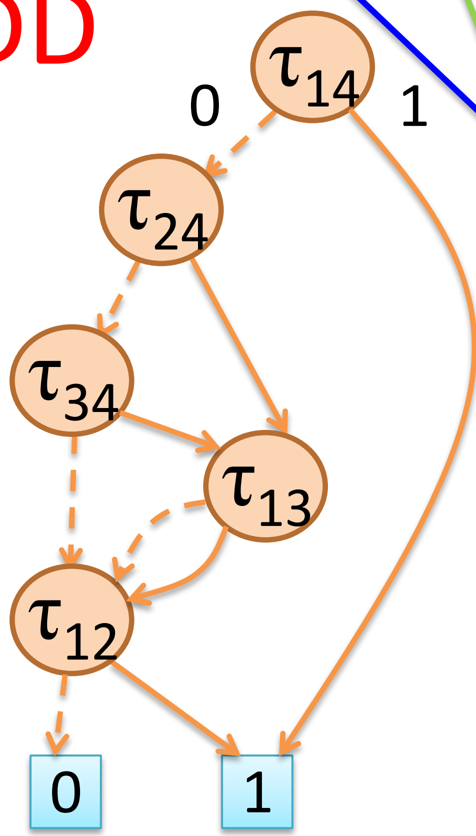
対応する τ を

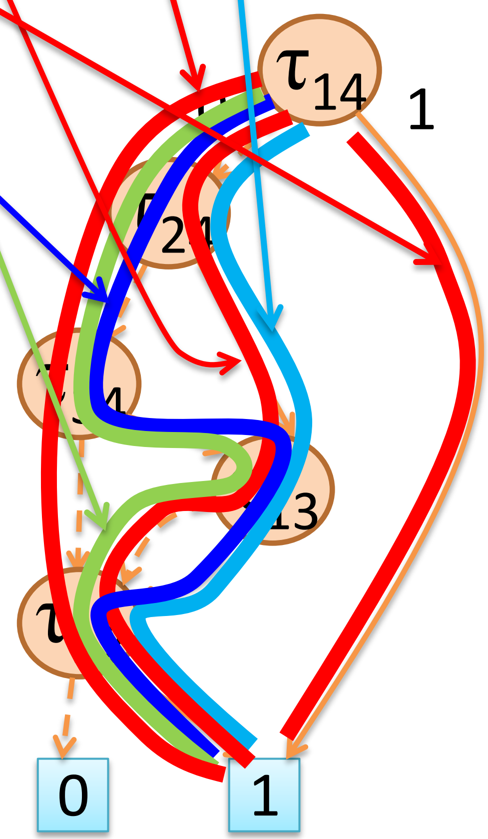
掛け合わせる

$$P = \{(4, 2, 3, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2), (2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)\}$$

$$= \{\tau_{14}, \tau_{12}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{34}, \tau_{12}\tau_{34}, \tau_{12}\}$$

πDD





$\boxed{1}$ へのパス1本が

1つの要素に対応

1枝 ↓ を通るときの

対応する τ を

掛け合わせる

πDD の特徴

- ZDD と同じく、集合演算が効率良く実行可能

P, Q を πDD（置換の集合）とする

$$P \cup Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ or } \pi \in Q \}$$

$$P \cap Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ and } \pi \in Q \}$$

$$P \setminus Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ and } \pi \notin Q \}$$

$$P * \tau = \{ \pi \tau \mid \pi \in P \}$$

$$P * Q = \{ \pi \pi' \mid \pi \in P \text{ and } \pi' \in Q \}$$

等の演算ができる

置換の多重集合

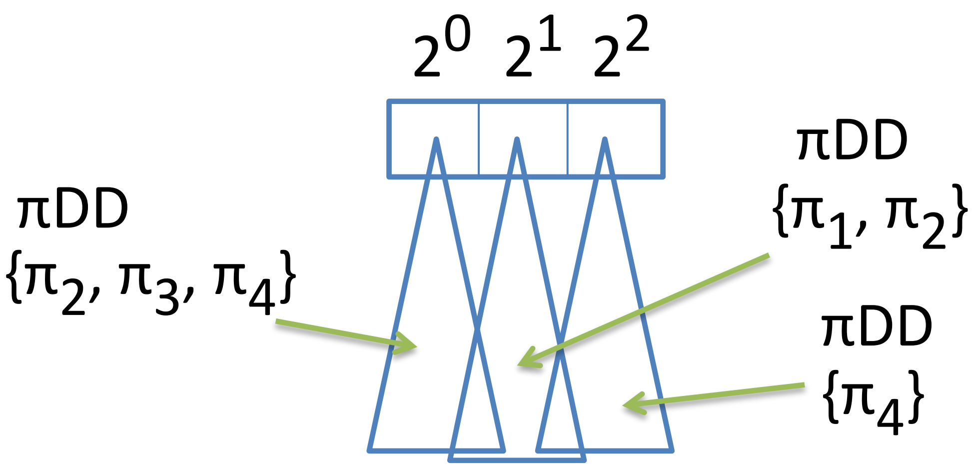
- 置換の個数の情報も保持する（多重集合）

$P = \{\, 2\,(4, 2, 3, 1),\ 3\,(4, 1, 3, 2),\ 1\,(4, 3, 1, 2),\ 5\,(1, 2, 4, 3) \,\}$

$= \{\, 2\,\pi_1,\ 3\,\pi_2,\ 1\,\pi_3,\ 5\,\pi_4 \,\}$

以下のように保持する

各 2^i のマスは πDD を1つもつ



π_j が含まれるすべてのマスについて 2^i を足した値が π_j の個数

置換の多重集合の演算

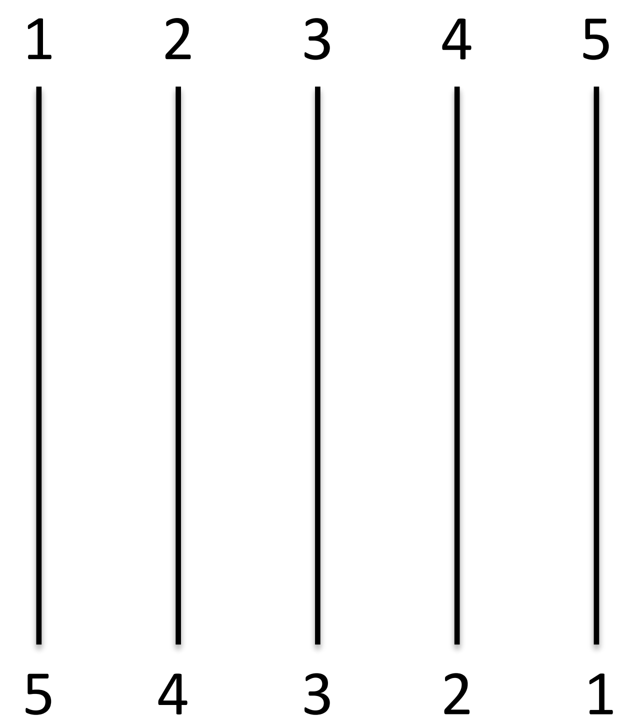
$P = \{\ 2\,\pi_1,\ 3\,\pi_2,\ 1\,\pi_3,\ \ 5\,\pi_4\ \}$

$Q = \{\ 6\,\pi_1,\ 2\,\pi_2,\ \qquad\quad 9\,\pi_4,\ \ 7\,\pi_5\}$

$P + Q = \{\ 8\,\pi_1,\ 5\,\pi_2,\ 1\,\pi_3,\ 14\,\pi_4,\ \ 7\,\pi_5\}$

他にもいろいろ考えられるが、省略

最小本数あみだくじの数え上げ

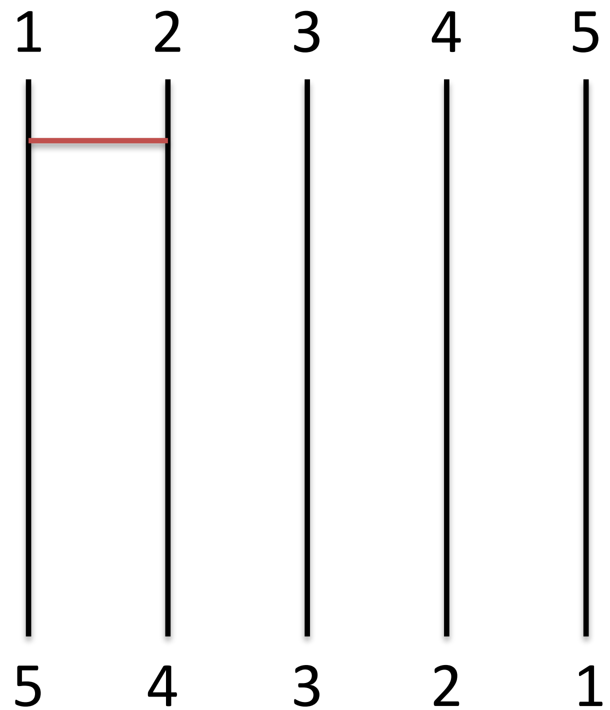


数字が逆順に並んでいる

横線を引いて
あみだくじを完成させる

最小必要本数は
N(N – 1) / 2 本

N(N – 1) / 2 本だけ線を引くとき、
ひき方は何通りあるか？



1本の線で実現できる置換は

τ_{12} τ_{23} τ_{34} τ_{45}

2本の線で実現できる置換は

$\tau_{12}\tau_{12}$ $\tau_{12}\tau_{23}$ $\tau_{12}\tau_{34}$ $\tau_{12}\tau_{45}$

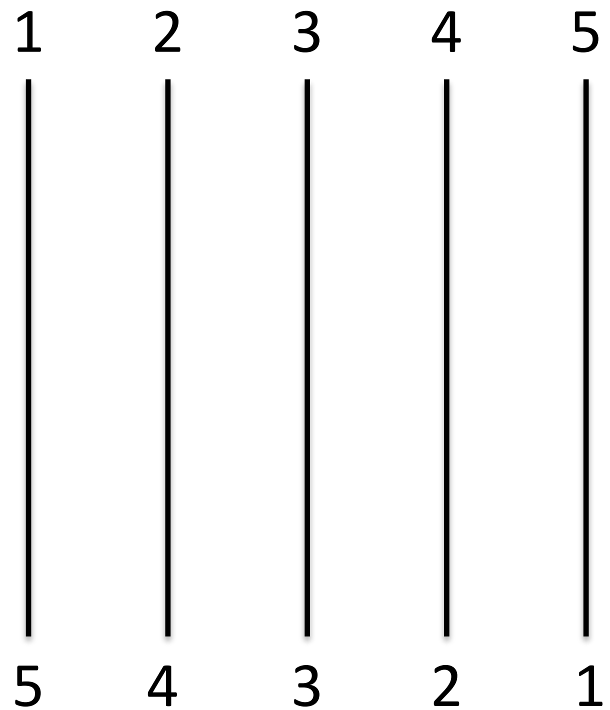
$\tau_{23}\tau_{12}$ …

i – 1 本の線で実現できる置換の集合を P とすると、

i 本の線で実現できる置換は

$$P * \tau_{12} + P * \tau_{23} + P * \tau_{34} + P * \tau_{45}$$

$$P * \tau = \{ \pi \tau \mid \pi \in P \}$$



アルゴリズム

$P := \{\pi_e\}$ （恒等置換だけからなる集合）

以下を N(N – 1)/2 回繰り返す

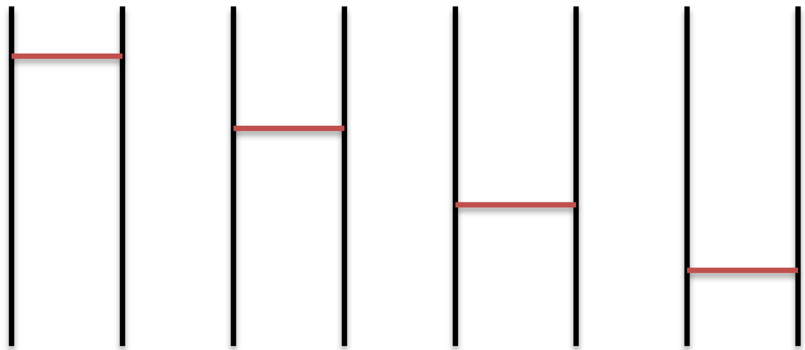
$$P := P * \tau_{12} + P * \tau_{23} + \cdots + P * \tau_{n-1,n}$$

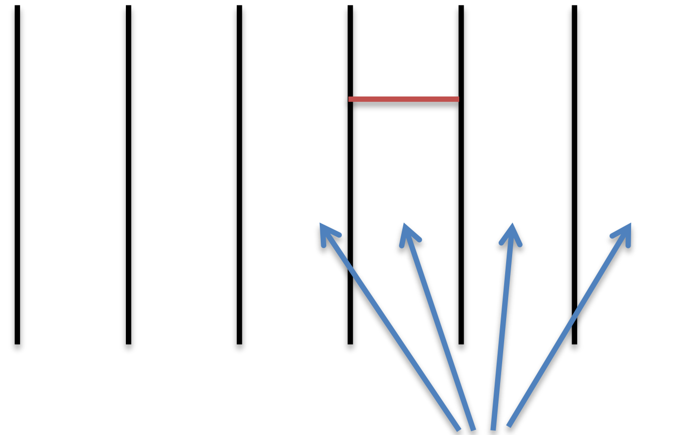
P として多重集合を用いれば、

P の中の (N, N – 1,…, 1) の数が、求めたいものになる？

この2つは同じあみだくじであるが、
異なるあみだくじであるとして2重に数えてしまっている

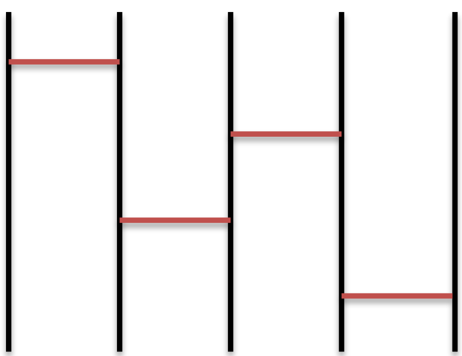
この2つは異なるあみだくじであるので問題ない



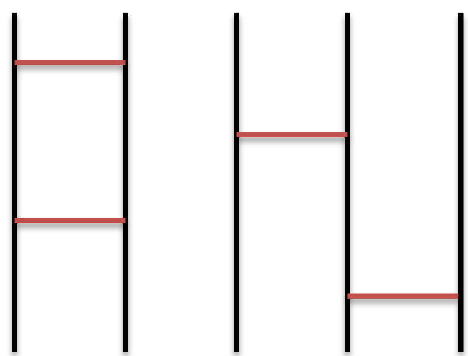


1つ以上離れたところに線を引くときは、
左の線を先に引いたものだけをカウントする

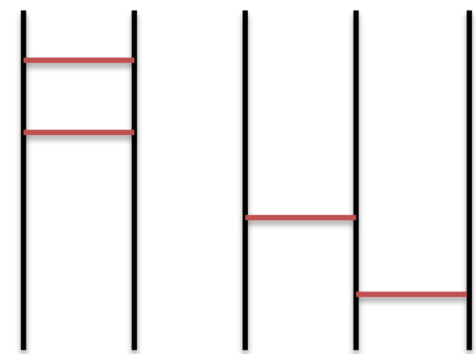
次に線を引けるのは
ここだけ



可



不可



可

修正アルゴリズム

置換の多重集合　$P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$　（P_i は最後に引かれた線が (i, i+1) である置換の集合）

$P_i := \{\tau_{i,\, i+1}\}$　　$(i = 1, \ldots, N-1)$　（線が1本引かれた状態からスタート）

以下を $N(N-1)/2 - 1$ 回繰り返す

$$
\left(
\begin{array}{l}
\text{for } (i = 1 \text{ to } N-1) \text{ do} \\
\quad P_i^{New} := (P_1 + \cdots + P_i + P_{i+1}) * \tau_{i,\, i+1} \\
\text{for } (i = 1 \text{ to } N-1) \text{ do} \\
\quad P_i := P_i^{New}
\end{array}
\right.
$$

（$P_N = \phi$ とする）

$P = P_1 + \cdots + P_{N-1}$

P の中の $(N, N-1, \ldots, 1)$ の数が、求めたいものになる

実験結果

n	Time (sec)	あみだくじ個数
6	0.20	908
7	2.43	24698
8	52.4	1232944
9	1769	112018190
10	46522	18410581880

修正アルゴリズム

n	Time (sec)	あみだくじ個数
7	0.18	24698
8	1.38	1232944
9	20.54	112018190
10	328.7	18410581880
11	8422	5449192389984
12	188121	2894710651370536

修正アルゴリズム
＋前回の結果削除

$P^{Old} := P_1 + \cdots + P_{N-1}$

for (i = 1 to N – 1) do

$P_i := P_i^{New} \setminus P^{Old}$