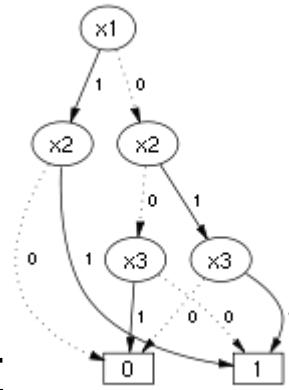


π DDを用いたあみだくじの多重列挙

- 川原 純 (JST ERATO 研究員)
- 齋藤 寿樹 (JST ERATO 研究員)
- 湊 真一 (北海道大学・JST ERATO総括)



xDD



BDD

(Binary Decision Diagram)
(二分決定グラフ)

論理関数を表すデータ構造

$$F = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + x_2 x_3 x_4$$

ZDD

(Zero-suppressed BDD)

集合の集合を表すデータ構造

$$S = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$$

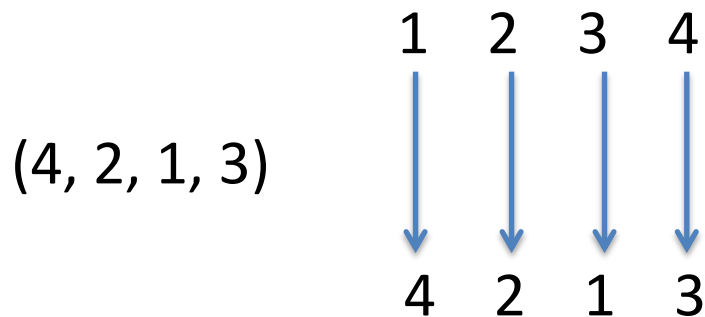
π DD

順列(置換)の集合を表すデータ構造

$$P = \{(4, 2, 1, 3), (2, 3, 1, 4), (3, 4, 1, 2)\}$$

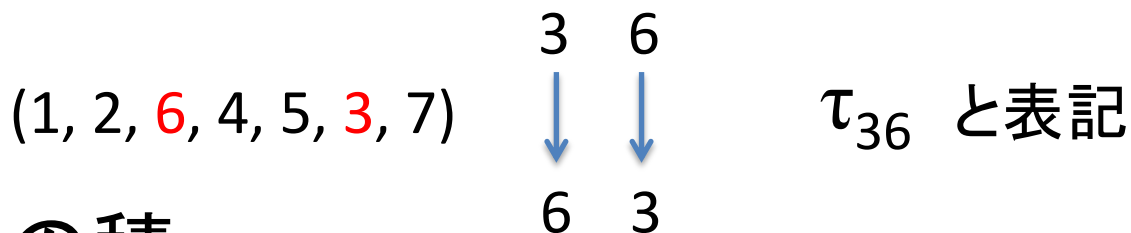


置換の表し方



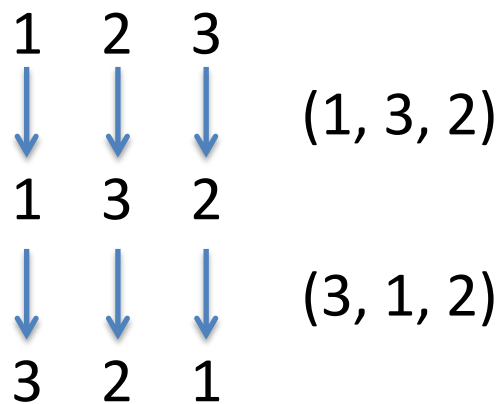
互換

2つの数字だけを交換する置換



置換の積

$$(1, 3, 2) \times (3, 1, 2) = (3, 2, 1)$$



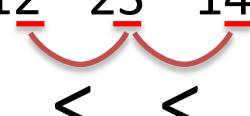
置換と互換

任意の置換は互換の積で表される

$$\begin{aligned}(3, 4, 2, 1) &= \tau_{23} \tau_{13} \tau_{14} \\ &= \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} \tau_{14} \tau_{24}\end{aligned}$$

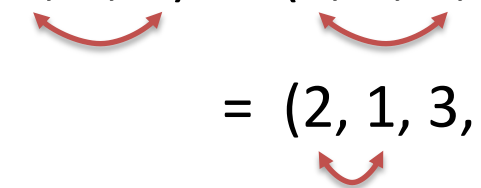
一意ではない

以下の形への分解は一意

$$(3, 4, 2, 1) = \tau_{12} \tau_{23} \tau_{14}$$


各 τ_{xy} : $x < y$

標準分解と呼ぶ

$$\begin{aligned}(3, 4, 2, 1) &= (3, 1, 2, 4) \tau_{14} \\ &= (2, 1, 3, 4) \tau_{23} \tau_{14} \\ &= \tau_{12} \tau_{23} \tau_{14}\end{aligned}$$




置換の集合

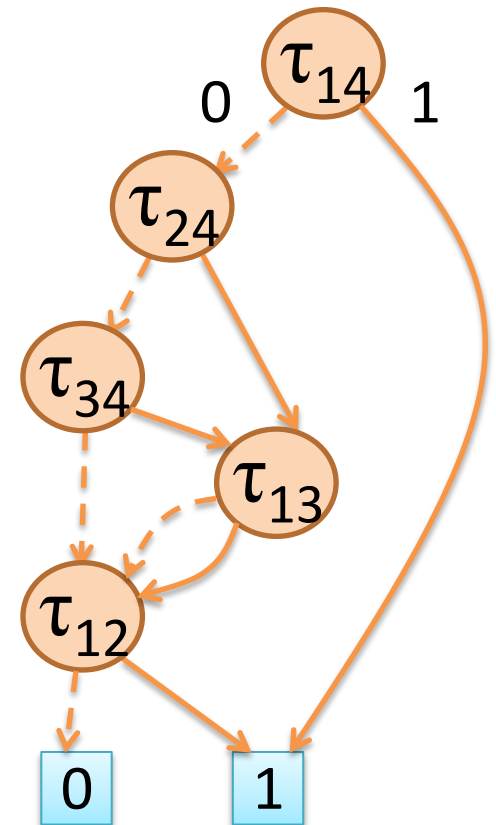
$$P = \{(4, 2, 3, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2), \\ (2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)\}$$

を効率の良いデータ構造で
記憶したい

各要素を標準分解する

$$P = \{ \tau_{14}, \tau_{12}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{24}, \\ \tau_{12}\tau_{13}\tau_{34}, \tau_{12}\tau_{34}, \tau_{12} \}$$

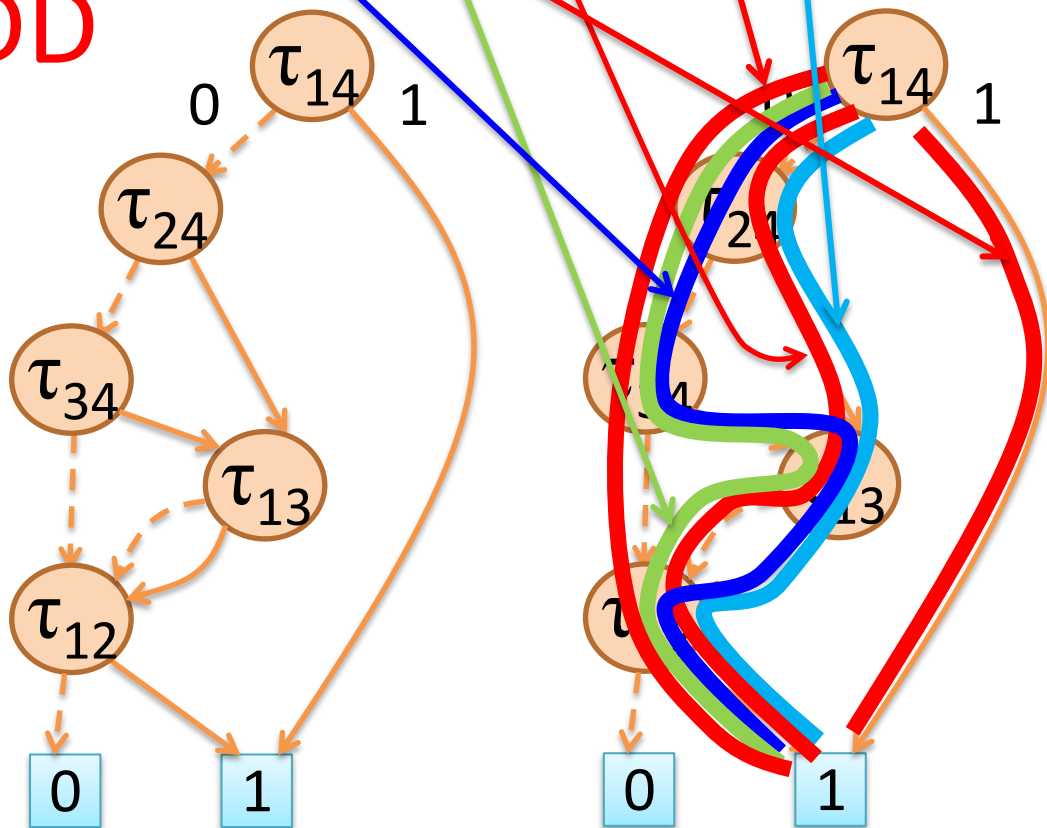
τ の集合の集合と考えて、ZDDで表す



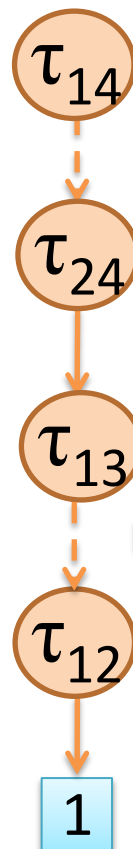
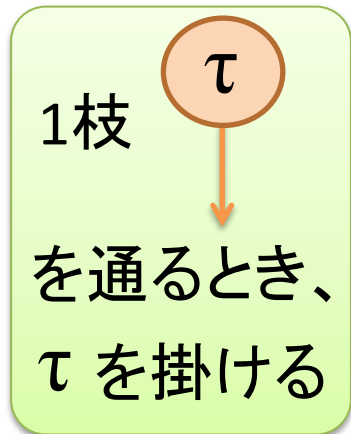
$$P = \{(4, 2, 3, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 3, 1, 2), (2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4)\}$$

$$= \{ \tau_{14}, \tau_{12}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{24}, \tau_{12}\tau_{13}\tau_{34}, \tau_{12}\tau_{34}, \tau_{12} \}$$

π DD



1 へのパス1本が
1つの要素に対応



$$\tau_{24} \times \tau_{12}$$



π DD の特徴

- ZDD と同じく、集合演算が効率良く実行可能

P, Q を π DD (置換の集合) とする

$$P \cup Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ or } \pi \in Q \}$$

$$P \cap Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ and } \pi \in Q \}$$

$$P \setminus Q = \{ \pi \mid \pi \in P \text{ and } \pi \notin Q \}$$

$$P * \tau = \{ \pi \tau \mid \pi \in P \}$$

$$P * Q = \{ \pi \pi' \mid \pi \in P \text{ and } \pi' \in Q \}$$

等の演算ができる



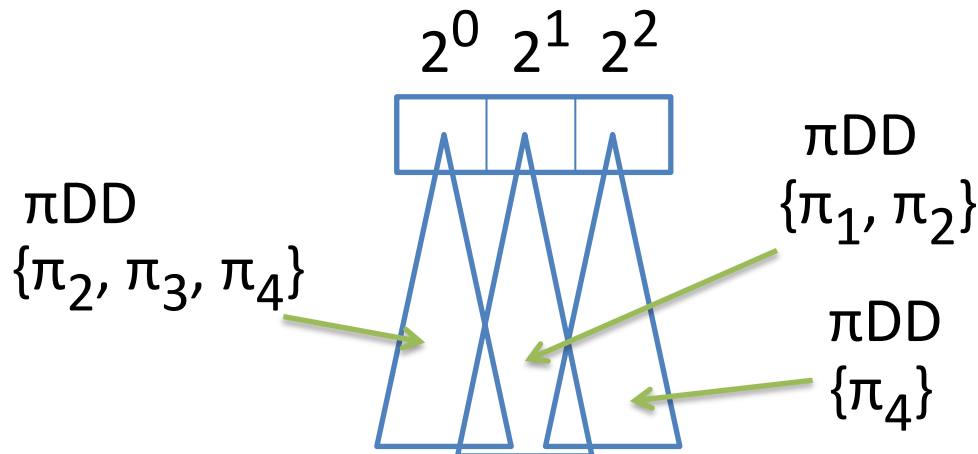
置換の多重集合

- 置換の個数の情報も保持する(多重集合)

$$P = \{ 2 (4, 2, 3, 1), 3 (4, 1, 3, 2), 1 (4, 3, 1, 2), 5 (1, 2, 4, 3) \}$$
$$= \{ 2 \pi_1, 3 \pi_2, 1 \pi_3, 5 \pi_4 \}$$

以下のように保持する

各 2^i のマスは π DD を1つもつ



π_j が含まれるすべてのマスについて 2^i を足した値が π_j の個数



置換の多重集合の演算

$$P = \{ 2 \pi_1, 3 \pi_2, 1 \pi_3, 5 \pi_4 \}$$

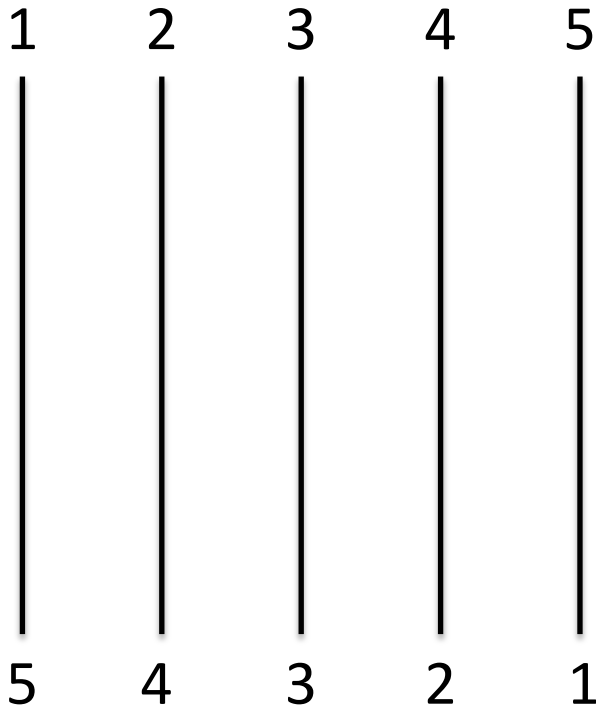
$$Q = \{ 6 \pi_1, 2 \pi_2, 9 \pi_4, 7 \pi_5 \}$$

$$P + Q = \{ 8 \pi_1, 5 \pi_2, 1 \pi_3, 14 \pi_4, 7 \pi_5 \}$$

他にもいろいろ考えられるが、省略



最小本数あみだくじの数え上げ



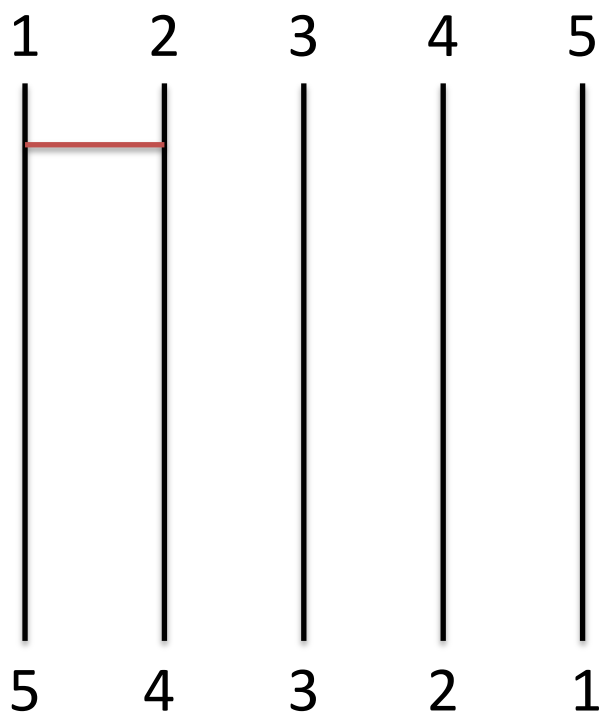
数字が逆順に並んでいる

横線を引いて
あみだくじを完成させる

最小必要本数は
 $n(n-1)/2$ 本

$n(n-1)/2$ 本だけ線を引くとき、
ひき方は何通りあるか？





1本の線で実現できる置換は

$$\tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{34} \quad \tau_{45}$$

2本の線で実現できる置換は

$$\tau_{12}\tau_{12} \quad \tau_{12}\tau_{23} \quad \tau_{12}\tau_{34} \quad \tau_{12}\tau_{45}$$

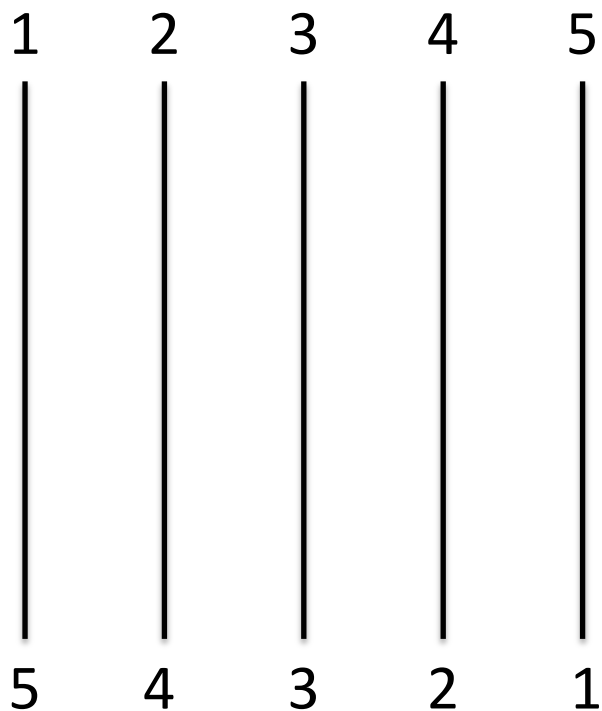
$$\tau_{23}\tau_{12} \quad \dots$$

$i-1$ 本の線で実現できる置換の集合を P とすると、
 i 本の線で実現できる置換は

$$P * \tau_{12} + P * \tau_{23} + P * \tau_{34} + P * \tau_{45}$$

$$P * \tau = \{ \pi \tau \mid \pi \in P \}$$





アルゴリズム

$P := \{\pi_e\}$ (恒等置換だけからなる集合)

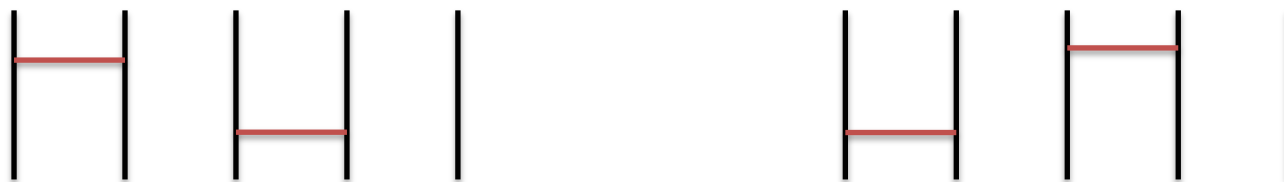
以下を $n(n-1)/2$ 回繰り返す

$$P := P * \tau_{12} + P * \tau_{23} + \dots + P * \tau_{n-1,n}$$

P として多重集合を用いれば、

P の中の $(n, n-1, \dots, 1)$ の数が、求めたいものになる？



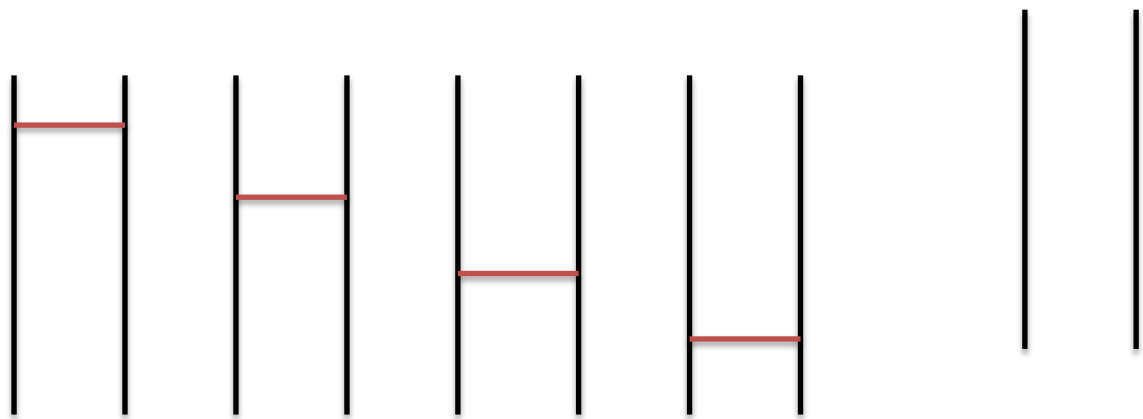


この2つは同じあみだくじであるが、異なるあみだくじであるとして2重に数えてしまっている

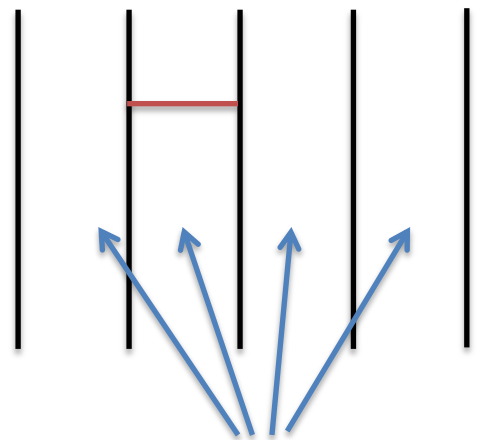


この2つは異なるあみだくじであるので問題ない

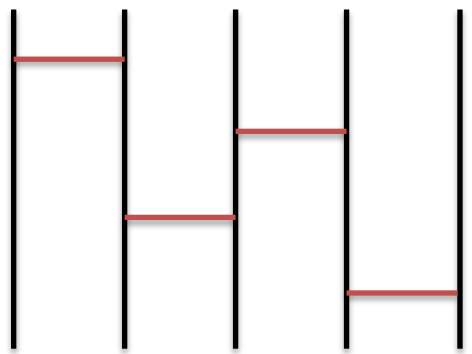




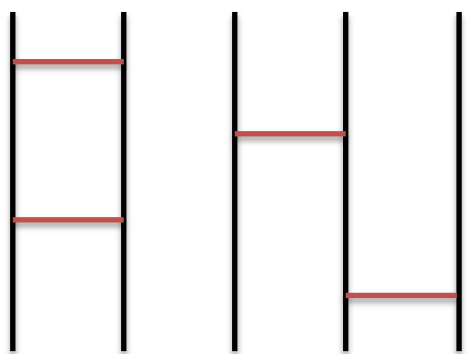
1つ以上離れたところに線を引くときは、
左の線を先に引いたものだけをカウントする



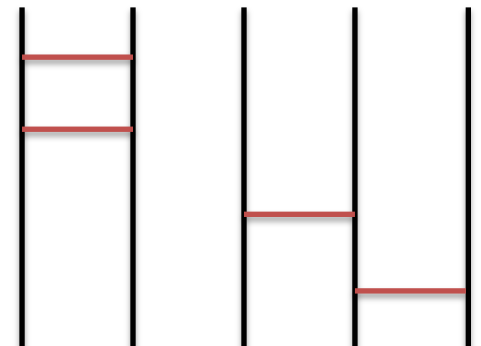
次に線を引けるのは
ここだけ



可



不可



可



修正アルゴリズム

置換の多重集合 P_1, P_2, \dots, P_{n-1}

(P_i は最後に引かれた線が
($i, i+1$) である置換の集合)

$P_i := \{\tau_{i, i+1}\} \quad (i = 1, \dots, n-1)$

(線が1本引かれた状態から
スタート)

以下を $n(n-1)/2 - 1$ 回繰り返す

(

for ($i = 1$ to $n-1$) do

$P_i^{\text{New}} := (P_1 + \dots + P_i + P_{i+1}) * \tau_{i, i+1} \quad (P_n = \phi \text{ とする})$

for ($i = 1$ to $n-1$) do

$P_i := P_i^{\text{New}}$

)

$P = P_1 + \dots + P_{n-1}$

P 中の $(n, n-1, \dots, 1)$ の数が、求めたいものになる



実験結果

| n | Time (sec) | あみだくじ個数 |
|----|------------|-------------|
| 6 | 0.20 | 908 |
| 7 | 2.43 | 24698 |
| 8 | 52.4 | 1232944 |
| 9 | 1769 | 112018190 |
| 10 | 46522 | 18410581880 |

修正アルゴリズム

| n | Time (sec) | あみだくじ個数 |
|----|------------|------------------|
| 7 | 0.18 | 24698 |
| 8 | 1.38 | 1232944 |
| 9 | 20.54 | 112018190 |
| 10 | 328.7 | 18410581880 |
| 11 | 8422 | 5449192389984 |
| 12 | 188121 | 2894710651370536 |

修正アルゴリズム

+ 前回の結果削除

$$P^{Prev} := P^{Prev} + P_1 + \dots + P_{n-1}$$

for (i = 1 to n - 1) do

$$P_i := P_i^{New} \setminus P^{Prev}$$

