

組合せ最適化 輪講 第1回

ERATO研究員 川原 純



輪講の概要

- この輪講では
「組合せ最適化 理論とアルゴリズム 第2版」
B. コルテ／J. フィーゲン 著
を読んでいます。



輪講の進め方

- 基本的には週1回、木曜日13:00から90～120分くらいを予定
- 場所はERATO講義室。テレビ会議で各地に配信(予定)
- 参加者の中から1人発表者を決めて発表
- 話を聞くだけ(発表しない)でも可

ただし、なるべく発表することを勧めます

- ホワイトボード or プロジェクタ(PPT等)を使います。
ホワイトボードを使う場合は内容を記録します。
- 数学の知識は高校数学＋線形代数のみ必要



輪講の発表について (学生向け説明)

- 輪講での発表は準備に時間がかかり大変ですが、なるべく発表することをお勧めします。
 - 発表することで、漠然と本を読むよりも深く知識や考え方が身に付きます
 - まとまった考えを人前で口述する練習 (プレゼン力の強化)
 - プレゼン能力をつけるには場数を踏む必要があります (就職活動対策にも有効)



輪講の発表について (学生向け説明)

- 準備の仕方

- 準備中、テキストを読んで不明なところは、まず30分くらい考えてください。それでも分からなければなるべく放置せず ERATO研究員に聞いてください
- PPT等で資料を作るときは、テキストの丸写しではなく、自分で説明がしやすいような資料を作ってください
 - 必要なら説明を自分でアレンジする
 - 具体例を自分で作って図を描くことを推奨

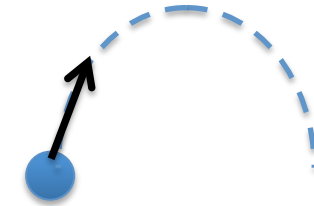


組合せ最適化とは？

- (組合せとは限らない) 最適化問題

$f(x)$ が最大(最小)となる x を求める問題

f や x は問題によっていろいろ。
 x には制約条件がつく



飛距離が最大になるような
発射の角度は？

x : 角度 ($0^\circ \sim 180^\circ$)
 $f(x)$: 飛距離

- **組合せ最適化問題**

x が組合せで表される最適化問題

儲けが最大になる詰め方は？

x : 詰めるアイテムの集合(組合せ)

$f(x)$: 儲け

解は $x = \{\text{商品A, 商品B, 商品C}\}$ のように
集合(組合せ)で表される

商品A	300 g 500 円	商品B	100 g 400 円
商品C	200 g 700 円	商品D	500 g 1000 円

袋に 600 g まで詰められる



組合せ最適化問題の特徴

- 全組合せを試せば解ける(最大値が求まる)
- 解の候補数は膨大になる(組合せ爆発)
 - 前の例でアイテムの個数が 256 個なら 2^{256} 通り
 - 最大値を求める効率の良い手法が必要



輪講の目的

- 組合せ最適化に関する様々な理論・アルゴリズムを身につける
 - 基本から始めて、上級者向けの内容までカバー
- 組合せ最適化で頻出のキーワードについて理解
 - 全域木、ネットワークフロー、最大フロー最小カット、マッチング、マトロイド、線形計画、整数計画...
等の言葉が出てきても戸惑わないようになる



本の内容紹介(前半)

「組合せ最適化 理論とアルゴリズム 第2版」 B. コルテノ / J. フィーゲン 著

- 第1章 はじめに
- 第2章 グラフ
- 第3章 線形計画法
- 第4章 線形計画アルゴリズム
- 第5章 整数計画法
- 第6章 全点木と有向木
- 第7章 最短パス
- 第8章 ネットワークフロー
- 第9章 最小費用フロー
- 第10章 最大マッチング
- 第11章 重み付きマッチング
- 第12章 b-マッチングとT-ジョイン
- 第13章 マトロイド
- 第14章 マトロイドの一般化

組合せ最適化全般で用いられる
基礎的技術

とりあえずここまで



第2章 グラフ

- グラフ理論の復習
 - 基礎的な定義
 - 木、閉路、カット
 - 連結性
 - オイラーグラフと2部グラフ
 - 平面性
 - 平面的双対性

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第3章 線形計画法

- 線形計画法とは

商品 X を 1kg 作るのに、材料 M が 30 g、材料 N が 50 g かかる。

商品 Y を 1kg 作るのに、材料 M が 20 g、材料 N が 70 g かかる。

材料 M は 800g、材料 N は 600g 使える。

商品 X は 1kg あたり 300円、商品 Y は 1kg あたり 500円で売れる。

売り上げを最大にするには、商品 X と商品 Y をどれだけ作ればよいか。

商品 X を x kg、商品 Y を y kg 作るとする

$$30x + 40y \leq 800$$

$$20x + 70y \leq 600$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

の条件の元で

$300x + 500y$ を最大にする x, y を求める

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第3章 線形計画法

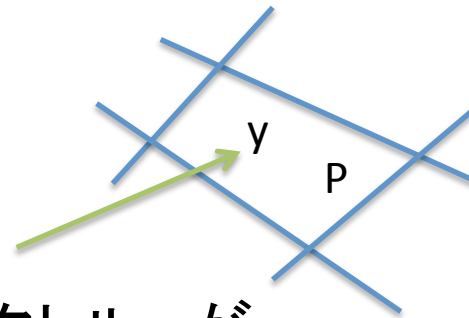
- 学ぶこと
 - 多面体の性質
 - 線形計画法を解く単体法アルゴリズム
 - 計算量について
 - 単体法の実装
 - 双対性

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第4章 線形計画アルゴリズム

- 学ぶこと
 - 頂点と面のサイズについて
 - 連分数展開（できるだけ小さな p' と q' を用いて、 q/p を q'/p' で近似したい）
 - ガウスの消去法
 - 楕円体法
 - Khachiyan の定理
 - 分離問題
 - 凸集合 P と有理数ベクトル y が与えられたとき、 $y \in P$ かどうか判定



第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第5章 整数計画法

- 整数計画法とは

商品 X を 1 個作るのに、材料 M が 30 g、材料 N が 50 g かかる。
商品 Y を 1 個作るのに、材料 M が 20 g、材料 N が 70 g かかる。
材料 M は 800g、材料 N は 600g 使える。
商品 X は 1個 あたり 300円、商品 Y は 1個 あたり 500円で売れる。
売り上げを最大にするには、商品 X と商品 Y を何個作ればよいか。

商品 X を x kg、商品 Y を y kg 作るとする

$$30x + 40y \leq 800$$

$$20x + 70y \leq 600$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x, y \text{ は 整数}$$

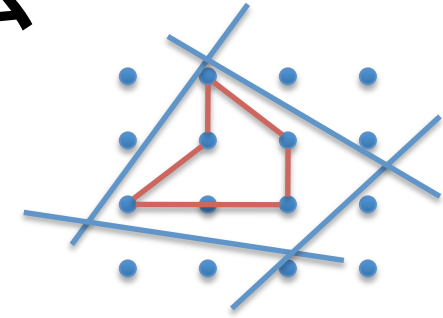
の条件の元で

$300x + 500y$ を最大にする x, y を求める

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第5章 整数計画法



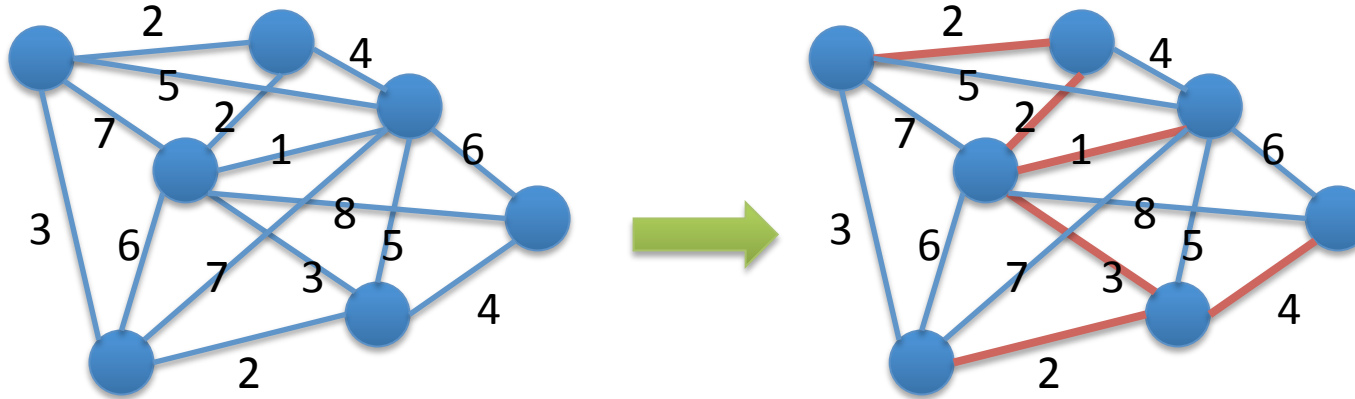
- 学ぶこと
 - 整数包 (Pを含む整数ベクトル全体の凸包)
 - 準備
 - ユニモジュラー変換
 - 完全双対整数性
 - 完全ユニモジュラー行列
 - 切除平面法
 - ラグランジュ緩和

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第6章 全点木と有向木

全域木(スパニングツリー)



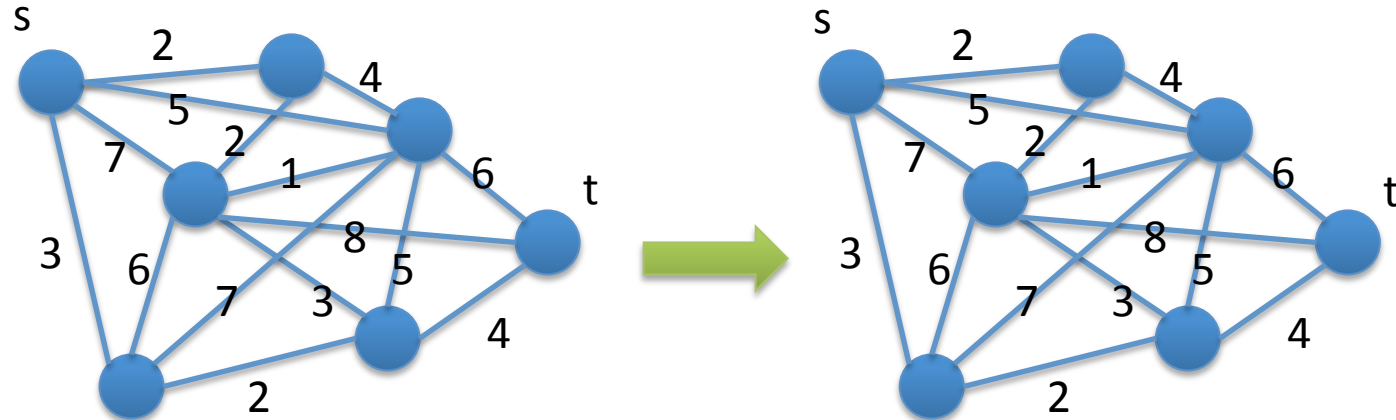
• 学ぶこと

- 全域木を求めるアルゴリズム
 - Kruskal のアルゴリズム(非常に簡単)
 - Prim のアルゴリズム(簡単)
- 有向グラフ版
- 線形計画法的な話
- パッキング

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第7章 最短パス



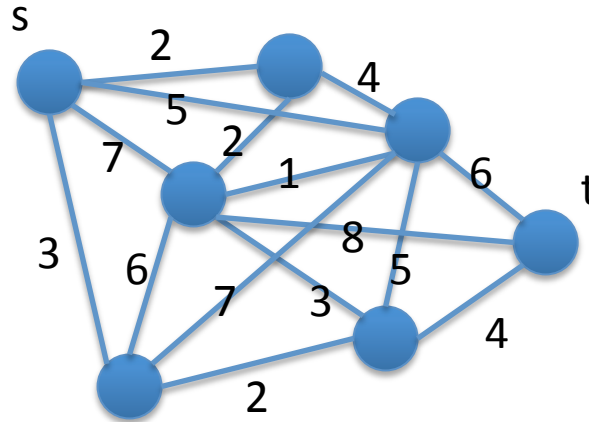
• 学ぶこと

- 最短パスを求めるアルゴリズム
 - Dijkstra のアルゴリズム (有名)
 - Moore-Bellman-Ford のアルゴリズム
- 全点間最短パス
- 最小平均長閉路問題

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第8章 ネットワークフロー



s から t まで水(フロー)を流すとき、
最大の流し方を求める

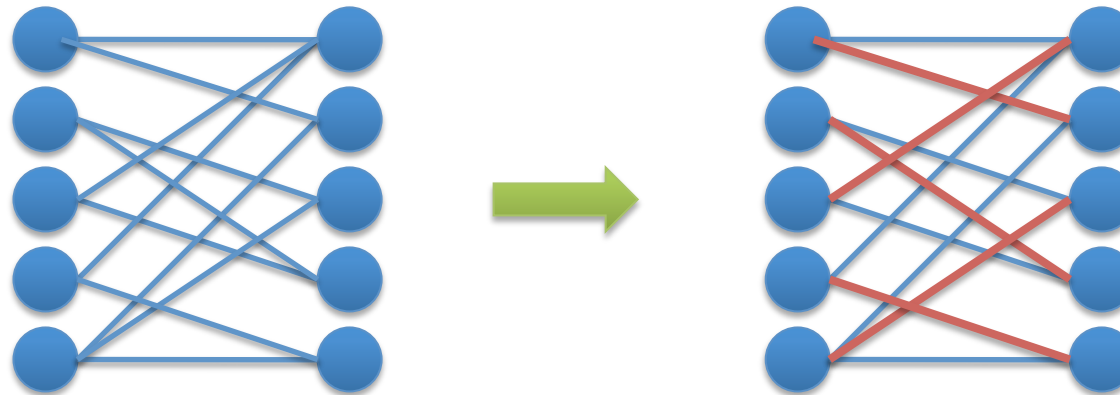
• 学ぶこと

- 最大フローを求めるアルゴリズム
 - Ford-Fulkerson のアルゴリズム
 - Edmonds-Karp のアルゴリズム
 - 藤重のアルゴリズム
 - Gomory-Hu のアルゴリズム (Gomory-Hu木)
- 最大フロー最小カット定理
- Menger の定理

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化



第10章 マッチング



- 学ぶこと
 - 2部グラフのマッチング
 - Hall の定理、結婚定理
 - 多項式時間アルゴリズム
 - Tutte 行列
 - 因子臨界的グラフの耳分解

第1章	はじめに
第2章	グラフ
第3章	線形計画法
第4章	線形計画アルゴリズム
第5章	整数計画法
第6章	全点木と有向木
第7章	最短パス
第8章	ネットワークフロー
第9章	最小費用フロー
第10章	最大マッチング
第11章	重み付きマッチング
第12章	b-マッチングとT-ジョイン
第13章	マトロイド
第14章	マトロイドの一般化

